ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 16 | Dezember 1936 | Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Berechnung des statisch-unbestimmt gestützten, geschlossenen Kreisringes.

Von *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch* in Delft.

1. Einleitung. Ist ein geschlossener Kreisring unveränderlichen Querschnittes von senkrecht zu seiner Ebene wirkenden Kräften belastet, so lassen sich, wie der erstgenannte Verfasser an andrer Stelle gezeigt hat[1]), die zu einem beliebigen Querschnitt gehörigen „inneren" Größen (d. h. die Querkraft D, das Biegemoment M und das Torsionsmoment W) in einfachster Weise „quasi-statisch" berechnen. Greifen die Kräfte alle in der Mittellinie des Ringes an, so lautet die Rechenvorschrift folgendermaßen:

Mache an der betrachteten Ringstelle einen Schnitt und führe zur Wiederherstellung des hierdurch verletzten Formänderungszustandes beiderseitig die Größen D, M und W ein. Bezeichne die Lage einer beliebigen äußeren Kraft P durch den bis zur Schnittstelle gemessenen Zentriwinkel φ ihres Angriffpunktes. Multipliziere alle äußeren Kräfte sowie die im Schnitt wirkenden statisch unbestimmten Größen mit dem zugehörigen Faktor $\frac{\varphi}{2\pi}$ (so daß also die zur einen Seite des Schnittes wirkenden Größen verschwinden und die zur anderen Seite wirkenden Größen unverändert bleiben). Dann sind D, M und W durch die Gleichgewichtsbedingungen des neuen Kraftsystems definiert. Ihre Werte sind unabhängig von dem Verhältnis der beiden Steifigkeitszahlen α_b und α_t gegen Biegung und Torsion.

Ist der Ring in drei Punkten gestützt, so lassen sich die Reaktionskräfte im voraus mit Hilfe der für den unzerschnittenen Ring geltenden wirklichen Gleichgewichtsbedingungen berechnen, so daß obenstehende Vorschrift ohne weiteres auf ihn angewendet werden kann.

Hat man es aber mit einem im mehr als drei Punkten gestützten Ring zu tun, so müssen, wenn auch hier die Vorschrift benutzt werden soll, zunächst die statisch unbestimmten Reaktionskräfte berechnet werden. Wie einfach, im Prinzip, die Herleitung der hierzu erforderlichen Formänderungsgleichungen — z. B. mit Hilfe der Castiglianoschen Sätze — auch sein mag, in Wirklichkeit erfordert sie eine äußerst langwierige Arbeit, deren zahlenmäßiger Teil außerdem mit peinlicher Sorgfalt ausgeführt werden muß; denn die Erfahrung zeigt, daß die genannten Gleichungen ganz besonders empfindlich gegen sehr geringe Änderungen

[1]) C. B. Biezeno: Über die quasi-statische Berechnung geschlossener kreisförmiger Ringe konstanten Querschnittes. ZAMM, Bd. 8, 1928, S. 237.

ihrer Beiwerte sind. In diesem Aufsatz zeigen wir zunächst, wie mit Hilfe der in Ziffer 4 vorgeführten Tabelle für jede beliebige Zahl und bei jeder beliebigen Lage der Stützpunkte die Formänderungsgleichungen des Ringes mit einem Schlag angeschrieben werden können. In den darauf folgenden Ziffern spezialisieren wir uns dann auf solche Ringe, bei denen die Stützpunkte regelmäßig über den Umfang verteilt sind.

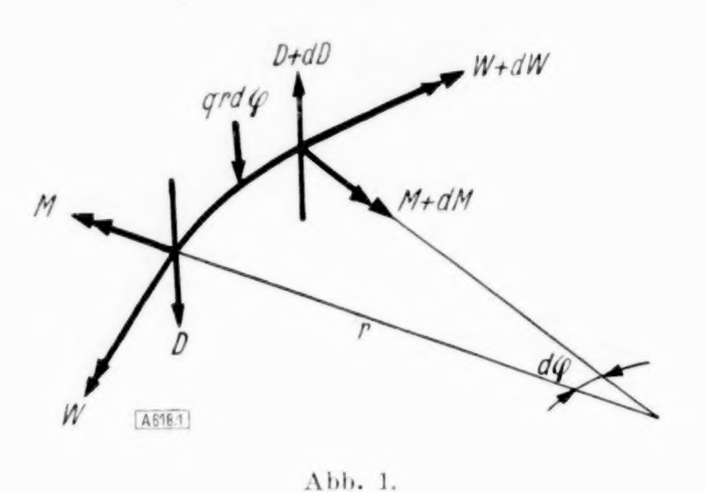


Abb. 1.

2. Die Eigenbelastungen des Ringes und die zu ihnen gehörigen Eigendurchbiegungen. Wir betrachten das in Abb. 1 gezeichnete Ringelement von der Länge $r\,d\varphi$, unter Einwirkung der in seinen Enden wirkenden „inneren“ Größen M, W und D und der äußeren Belastung $q\,r\,d\varphi$. Die in die vertikale Tangentialebene des Ringes fallende Winkeländerung der Ringtangente sei mit ψ, die Drehung des Ringquerschnittes als Ganzes mit ϑ bezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingungen dieses Elementes lauten:

$$\left.\begin{aligned} q\,r\,d\varphi - d\,D &= 0 \\ d\,W - M\,d\varphi &= 0 \\ d\,M + W\,d\varphi - D\,r\,d\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\,D}{d\varphi} &= q\,r \\ \frac{d\,W}{d\varphi} &= M \\ \frac{d\,M}{d\varphi} + W &= D\,r \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1).$$

Differentiation der dritten Gleichung führt unter Berücksichtigung der beiden anderen zu

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = q\,r^2 \quad \ldots \quad (2).$$

Die Differentialbeziehungen zwischen ψ, ϑ, M und W haben, wie man leicht einsieht, folgende Form:

$$d\,\psi = \frac{M\,r\,d\varphi}{a_b} - \vartheta\,d\varphi\,, \qquad d\,\vartheta = \frac{W\,r\,d\varphi}{a_t} + \psi\,d\varphi \quad \ldots \quad (3).$$

Denn wäre das Element vollkommen steif, so müßte der im linken Ende durch ψ und ϑ definierte totale Rotationsvektor identisch sein mit dem im rechten Ende durch $(\psi + d\,\psi)$ und $(\vartheta + d\,\vartheta)$ definierten Vektor, woraus sich

$$d\,\psi = -\,\vartheta\,d\varphi\,, \quad d\,\vartheta = \psi\,d\varphi$$

ergäbe. In Wirklichkeit aber verursacht das Biegemoment noch eine zusätzliche Relativverdrehung der beiden Endtangenten vom Betrage $M\,r\,d\varphi : a_b$ und das Torsionsmoment eine Relativverdrehung der beiden Endquerschnitte vom Betrage $W\,r\,d\varphi : a_t$, so daß die Beziehungen (3) bestehen. Differentiation der ersten dieser Gleichungen liefert unter Berücksichtigung der zweiten

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{r}{a_b}\frac{d\,M}{d\varphi} - \frac{W\,r}{a_t} - \psi \quad \ldots \quad (4).$$

Wir betrachten jetzt zunächst den Sonderfall, daß die Belastung des Ringes durch

$$q = q_k \cos k\,\varphi$$

dargestellt wird, wo q_k eine Konstante und k eine ganze Zahl > 1 bezeichnet.

Sodann geht (2) über in

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = q_k r^2 \cos k\varphi ;$$

es ist somit

$$M = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi - \frac{q_k r^2}{k^2 - 1} \cos k\varphi$$

und — wegen der Gln. (1) —

$$D = \frac{q_k r \sin k\varphi}{k} + C_3 , \qquad W = C_1 \sin\varphi - C_2 \cos\varphi - \frac{q_k r^2}{k(k^2-1)} \sin k\varphi + C_3 .$$

Gl. (4) geht hierdurch über in

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \psi = -\left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) C_1 r \sin\varphi + \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) C_2 r \cos\varphi - \frac{C_3 r}{a_t} + \left(\frac{k^2}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) \frac{q_k r^3}{k(k^2-1)} \sin k\varphi .$$

Ihre Lösung ist:

$$\psi = C_4 \cos\varphi + C_5 \sin\varphi + \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) \frac{C_1 r}{2} \varphi \cos\varphi + \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) \frac{C_2 r}{2} \varphi \sin\varphi$$

$$- \frac{C_3 r}{a_t} - \left(\frac{k^2}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) \frac{q_k r^3}{k(k^2-1)^2} \sin k\varphi .$$

Weil für den geschlossenen Ring ψ periodisch in φ sein muß, und zwar mit der Periode $\varphi = 2\pi$, so sind die Konstanten C_1 und C_2 gleich Null zu setzen, und man erhält:

$$\psi = C_4 \cos\varphi + C_5 \sin\varphi - \frac{C_3 r}{a_t} - \left(\frac{k^2}{a_b} + \frac{1}{a_t}\right) \frac{q_k r^3}{k(k^2-1)^2} \sin k\varphi .$$

Für die senkrechte Durchbiegung y des Ringes findet man schließlich:

$$y = \int \psi r \, d\varphi + C_6 = C_4 r \sin\varphi - C_5 r \cos\varphi - \frac{C_3 r^2 \varphi}{a_t} + C_6 + \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{k^2 a_t}\right) \frac{q_k r^4}{(k^2-1)^2} \cos k\varphi .$$

Weil y, ebenso wie ψ, periodisch in φ mit der Periode 2π ist, muß $C_3 = 0$ gesetzt werden. Die übrigen mit einer Integrationskonstante behafteten Glieder stellen je für sich (und auch zusammen) eine Verschiebung dar, welche der Ring als starrer Körper erleidet. Sie sind also für die Untersuchung der Ringdeformation ohne Bedeutung und werden weiterhin unterdrückt. Aus der Formel

$$y = \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{k^2 a_t}\right) \frac{q_k r^4}{(k^2-1)^2} \cos k\varphi \qquad \text{(5)}$$

geht hervor, daß die zu der Belastung $q = q_k \cos k\varphi$ gehörige Durchbiegung zu dieser Belastung proportional ist. In genau derselben Weise zeigt man, daß jede Belastung $q = q_k \sin k\varphi$ dieselbe Eigenschaft hat, und daß der zu $q_k \sin k\varphi$ gehörige Proportionalitätsfaktor denselben Wert als der zu $q_k \cos k\varphi$ gehörige Faktor hat. Es gehört also zu der Belastung $q = q_k \sin k\varphi$ die Durchbiegung

$$y = \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{k^2 a_t}\right) \frac{q_k r^4}{(k^2-1)^2} \sin k\varphi \qquad \text{(6).}$$

Wir bezeichnen die Belastungen

$$q = q_k \cos k\varphi \quad \text{und} \quad q = q_k \sin k\varphi$$

als „Eigenbelastungen".

3. Die Formänderungsgleichungen. Weil die zu den Eigenbelastungen gehörigen Durchbiegungen ein für allemal bekannt sind, so kommt es zur Bestimmung der zu einer beliebigen Belastung gehörigen Durchbiegung nur noch auf die Zerlegung dieser Belastung in die ein vollständiges System bildenden Eigenbelastungen an. Aus einem noch näher zu erklärenden Grunde nehmen wir an, daß die äußere Belastung aus lauter „quasi"-konzentrierten Belastungen $P_i \, (i = 1 \ldots n)$ besteht, d. h. aus Belastungen q_i, welche sich je über eine ganz kurze und als „gerade" zu betrachtende Strecke $2a = 2r\beta$ des Ringumfanges gleichmäßig verteilen und eine endliche Gesamtgröße P_i haben, so daß $2 q_i a = P_i$ ist. Der Angriffspunkt

der Kraft P_i habe die Winkelkoordinate α_i. Das System aller Kräfte P_i (die Reaktionskräfte mit einbegriffen) bildet ein Gleichgewichtssystem, so daß

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i\, r \cos\alpha_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i\, r \sin\alpha_i = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Betrachten wir jetzt eine einzige dieser quasi-konzentrierten Kräfte $P_i = 2\, q_i\, r\, \beta_i$, deren Verteilung q_i^* über den Kreisumfang durch

$$q_i^* = 0 \text{ für } 0 \leqq \varphi < (\alpha_i - \beta)\,, \quad q_i^* = q_i \text{ für } \alpha_i - \beta \leqq \varphi \leqq \alpha_i + \beta\,, \quad q_i^* = 0 \text{ für } \alpha_i + \beta < \varphi \leqq 2\pi$$

charakterisiert ist, so läßt sich die Funktion q_i^* in folgender Fourier-Reihe entwickeln:

$$q_i^* = \frac{P_i}{2\pi r} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\varphi\,,$$

in welcher

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q_i^* \cos k\varphi\, d\varphi = \frac{q_i}{\pi}\int_{\alpha_i-\beta}^{\alpha_i+\beta} \cos k\varphi\, d\varphi = \frac{2\,q_i}{\pi k}\cos k\,\alpha_i \sin k\,\beta\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q_i^* \sin k\varphi\, d\varphi = \frac{q_i}{\pi}\int_{\alpha_i-\beta}^{\alpha_i+\beta} \sin k\varphi\, d\varphi = \frac{2\,q_i}{\pi k}\sin k\,\alpha_i \sin k\,\beta$$

zu setzen ist. Oder in etwas anderer Form:

$$q_i^* = \frac{P_i}{2\pi r} + \frac{P_i \cos\alpha_i}{\pi r}\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\varphi + \frac{P_i \sin\alpha_i}{\pi r}\frac{\sin\beta}{\beta}\sin\varphi + \frac{P_i}{\pi r}\sum_{k=2}^{\infty}\cos k(\varphi-\alpha_i)\frac{\sin k\beta}{k\beta} \quad . \quad (8).$$

Summiert man die zu den verschiedenen Indizes i gehörigen Belastungen q_i^*, so erhält man, unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen (7) für die gesamte Belastung q des Ringes:

$$q = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{\pi r}\sum_{k=2}^{\infty}\cos k(\varphi-\alpha_i)\frac{\sin k\beta}{k\beta}\,.$$

Die von dieser Belastung bedingte Gesamtdurchbiegung kann unter Benutzung der Gln. (5) und (6) jetzt unmittelbar hingeschrieben werden. Diesem durch einfache Superposition zu erhaltenen Resultat kann aber noch eine Zusatzdurchbiegung zugegliedert werden, welche von einer Bewegung des Ringes als starres Ganzes herrührt, und welche also durch

$$A + B\cos\varphi + C\sin\varphi$$

(wo A, B, C freie Konstanten bezeichnen), dargestellt werden kann. Man findet also:

$$y = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i r^3}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_b} + \frac{1}{k^2\alpha_t}\right)\frac{\cos k(\varphi-\alpha_i)}{(k^2-1)^2}\frac{\sin k\beta}{k\beta}$$

oder

$$y = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha_b}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\varphi-\alpha_i)}{(k^2-1)^2}\frac{\sin k\beta}{k\beta} + \frac{1}{\alpha_t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\varphi-\alpha_i)}{k^2(k^2-1)^2}\frac{\sin k\beta}{k\beta}\right]\frac{P_i r^3}{\pi}.$$

Läßt man in diesem Ausdruck β gegen Null gehen, was mit einem Übergang zu konzentrierten Kräften übereinstimmt, so kann man zeigen, daß obenstehender Ausdruck in

$$y = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha_b}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\varphi-\alpha_i)}{(k^2-1)^2} + \frac{1}{\alpha_t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\varphi-\alpha_i)}{k^2(k^2-1)^2}\right]\frac{P_i r^3}{\pi} \quad . \quad . \quad (9)$$

übergeht.

Hat man es nun mit einem Ring auf m festen Stützen zu tun, so ist für jede der zugehörigen Reaktionskräfte die Verschiebung gleich Null zu setzen. Ist P_j eine derartige Reaktionskraft und α_j ihre Winkelkoordinate, so gilt also

$$A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_b}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\alpha_j-\alpha_i)}{(k^2-1)^2} + \frac{1}{a_t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\alpha_j-\alpha_i)}{k^2(k^2-1)^2}\right]\frac{P_i r^3}{\pi} = 0 \quad . \quad . \quad (10).$$

Die m-Gleichungen von der Form (10) bilden zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (7) ein System von $(m+3)$-Gleichungen, welches zur Bestimmung von den drei Konstanten A, B, C und den m-Reaktionen ausreicht. (Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß der einfachen Schreibweise wegen sowohl die Stützkräfte wie die bekannten äußeren Kräfte alle mit dem Buchstaben P bezeichnet worden sind. Bei der praktischen Auswertung einer Aufgabe empfiehlt es sich, die m-Stützkräfte mit $X_1 \ldots\ldots X_m$ und ihre zugehörigen Koordinaten mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ zu bezeichnen und die Gln. (10) und (7) entsprechend umzuschreiben.)

Zu allererst kommt es jetzt auf die Bemerkung an, daß alle in den Formänderungsgleichungen (10) auftretenden Beiwerte der Kräfte P aus den beiden Funktionen

$$S(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{(k^2-1)^2} \quad \text{und} \quad T(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2(k^2-1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

hergeleitet werden können. Sobald also die Werte dieser Funktionen für die verschiedenen Werte des Argumentes ψ tabelliert zur Verfügung stehen, können für jeden Belastungsfall und für jede Zahl der Stützpunkte die Gln. (10) und (7), welche die Stützkräfte und die Konstanten A, B, C bestimmen, unmittelbar in geschlossener Form hingeschrieben werden. Weil in der Gl. (10) $(\alpha_j - \alpha_i)$ immer durch $2\pi - (\alpha_j - \alpha_i)$ ersetzt werden darf, soll fortan unter $(\alpha_j - \alpha_i)$ stets der kleinste Winkelabstand der zu P_j und P_i gehörigen Angriffspunkte verstanden werden. Hierdurch erreicht man, daß die Funktionen S und T, zu deren Berechnung wir jetzt übergehen, nur für $0 \leq \psi \leq \pi$ tabelliert zu werden brauchen.

4. Die Berechnung der Funktionen S und T. Aus der ersten Formel (11), Ziffer 3, leitet man zunächst die folgende Differentialgleichung für S ab:

$$\left.\begin{aligned}
S'' + S &= -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{(k^2-1)} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k+1}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos 2\psi + \frac{\cos 3\psi}{2} + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{\cos k\psi - \cos(k-2)\psi}{k-1}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos 2\psi + \frac{\cos 3\psi}{2} - 2\sin\psi\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{\cos 3\psi}{4} + \sin^2\psi + \frac{\sin\psi\sin 2\psi}{2} - \sin\psi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\psi - \sin\psi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Nun stellt, wie man sich leicht überzeugt, die Summe

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}$$

im Intervalle $0 < \psi < 2\pi$ die Funktion $(\pi - \psi)$ dar, so daß in diesem Intervalle gilt:

$$S'' + S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\psi + \left(\frac{\pi - \psi}{2}\right)\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$S = A\cos\psi + B\sin\psi - \frac{\pi}{4}\psi\cos\psi - \frac{1}{4}\psi\sin\psi + \frac{\psi^2\cos\psi}{8} - \frac{1}{2}.$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich aus der Bedingung, daß der rechts stehende Ausdruck für $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ den Wert

$$S_{\psi=0} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^2-1)^2} \quad \text{bzw.} \quad S_{\psi=\frac{\pi}{2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{[(2\nu)^2-1]^2}$$

annehmen soll, so daß

$$A = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)^2}, \qquad B = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{[(2\nu)^2-1]^2}$$

ist. Die in den rechten Seiten stehenden Summen sind bekannt, und zwar ist

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{[(2\nu)^2-1]^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2},$$

so daß

$$A = \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{16} \quad \text{und} \quad B = \frac{\pi}{4}.$$

Es ist somit

$$S(\psi) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{3}{16} - \frac{\pi}{4}\psi\right)\cos\psi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\psi\right)\sin\psi + \frac{\psi^2\cos\psi}{8} \qquad 0 \leqq \psi \leqq \pi \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zur Bestimmung von T bemerke man, daß

$$T - S = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2(k^2-1)} = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2}.$$

Nun ist wegen (1)

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2-1} = S'' + S \qquad \text{oder nach (2)} \qquad -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\psi + \frac{\pi-\psi}{2}\sin\psi,$$

so daß unter Benutzung von (3) für T geschrieben werden kann:

$$T = -1 + \left[\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{7}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\psi^2}{8}\right]\cos\psi + \frac{3}{4}(\pi-\psi)\sin\psi + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2}.$$

Die in der rechten Seite stehende unendliche Summe kann mit Hilfe zweier bekannten Fourierschen Reihenentwicklungen leicht ermittelt werden. Es gilt nämlich:

$$\text{für} \quad 0 \leqq \psi \leqq \pi \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos\psi + \frac{1}{3^2}\cos 3\psi + \frac{1}{5^2}\cos 5\psi + \ldots\ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$\text{für} \quad -\pi \leqq \psi \leqq \pi \quad \frac{\pi^2-\psi^2}{\pi} = \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{\pi}\left[\cos\psi - \frac{1}{2^2}\cos 2\psi + \frac{1}{3^2}\cos 3\psi - \frac{1}{4^2}\cos 4\psi + \ldots\ldots\right] \quad (5).$$

Aus (4) und (5) findet man für $0 \leqq \psi \leqq \pi$

$$2\psi + \frac{\pi^2-\psi^2}{\pi} = \frac{5}{3}\pi - \frac{4}{\pi}\cos\psi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2}$$

oder

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{k^2} = \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi\psi}{2} - \frac{\pi^2-\psi^2}{4} - \cos\psi,$$

so daß schließlich

$$T(\psi) = -1 + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\psi}{2} + \frac{\psi^2}{4} + \left[\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{23}{16} - \frac{\pi}{4}\psi + \frac{\psi^2}{8}\right]\cos\psi + \frac{3}{4}(\pi-\psi)\sin\psi \qquad 0 \leqq \psi \leqq \pi \quad (6).$$

I. Tabelle für die Funktionen $S(\varphi)$ und $T(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$.

φ	S	T	φ	S	T	φ	S	T	φ	S	T	φ	S	T	φ	S	T
0	0,13497	0,029901															
1	0,13483	0,029880	31	0,04624	0,012702	61	— 0,07472	— 0,016514	91	— 0,10654	— 0,027417	121	— 0,03923	— 0,011475	151	0,05700	0,014548
2	0,13444	0,029819	32	0,04176	0,011732	62	— 0,07758	— 0,017299	92	— 0,10566	— 0,027283	122	— 0,03598	— 0,010629	152	0,05965	0,015285
3	0,13380	0,029716	33	0,03726	0,010749	63	— 0,08031	— 0,018060	93	— 0,10466	— 0,027116	123	— 0,03270	— 0,009772	153	0,06223	0,016004
4	0,13290	0,029573	34	0,03275	0,009754	64	— 0,08294	— 0,018797	94	— 0,10355	— 0,026918	124	— 0,02939	— 0,008905	154	0,06473	0,016704
5	0,13177	0,029389	35	0,02823	0,008750	65	— 0,08545	— 0,019509	95	— 0,10232	— 0,026688	125	— 0,02607	— 0,008030	155	0,06717	0,017384
6	0,13042	0,029165	36	0,02371	0,007736	66	— 0,08784	— 0,020194	96	— 0,10099	— 0,026427	126	— 0,02271	— 0,007146	156	0,06953	0,018044
7	0,12885	0,028902	37	0,01919	0,006716	67	— 0,09011	— 0,020854	97	— 0,09954	— 0,026134	127	— 0,01935	— 0,006255	157	0,07181	0,018682
8	0,12705	0,028599	38	0,01468	0,005689	68	— 0,09226	— 0,021485	98	— 0,09799	— 0,025812	128	— 0,01598	— 0,005359	158	0,07401	0,019299
9	0,12506	0,028257	39	0,01018	0,004658	69	— 0,09428	— 0,022089	99	— 0,09634	— 0,025460	129	— 0,01259	— 0,004457	159	0,07613	0,019893
10	0,12288	0,027877	40	0,00571	0,003625	70	— 0,09618	— 0,022663	100	— 0,09458	— 0,025079	130	— 0,00920	— 0,003552	160	0,07816	0,020464
11	0,12051	0,027460	41	0,00127	0,002589	71	— 0,09795	— 0,023208	101	— 0,09273	— 0,024668	131	— 0,00582	— 0,002644	161	0,08011	0,021012
12	0,11796	0,027007	42	— 0,00315	0,001553	72	— 0,09960	— 0,023724	102	— 0,09078	— 0,024230	132	— 0,00243	— 0,001734	162	0,08197	0,021534
13	0,11525	0,026517	43	— 0,00753	0,000518	73	— 0,10112	— 0,024209	103	— 0,08874	— 0,023764	133	0,00095	— 0,000824	163	0,08373	0,022032
14	0,11237	0,025992	44	— 0,01186	— 0,000514	74	— 0,10251	— 0,024663	104	— 0,08660	— 0,023271	134	0,00433	0,000087	164	0,08541	0,022505
15	0,10934	0,025433	45	— 0,01614	— 0,001544	75	— 0,10377	— 0,025087	105	— 0,08437	— 0,022751	135	0,00769	0,000995	165	0,08700	0,022951
16	0,10615	0,024841	46	— 0,02038	— 0,002568	76	— 0,10490	— 0,025478	106	— 0,08206	— 0,022206	136	0,01103	0,001902	166	0,08849	0,023371
17	0,10283	0,024216	47	— 0,02456	— 0,003586	77	— 0,10591	— 0,025838	107	— 0,07967	— 0,021635	137	0,01435	0,002805	167	0,08988	0,023764
18	0,09940	0,023560	48	— 0,02867	— 0,004596	78	— 0,10678	— 0,026165	108	— 0,07719	— 0,021041	138	0,01765	0,003704	168	0,09117	0,024129
19	0,09582	0,022874	49	— 0,03272	— 0,005598	79	— 0,10753	— 0,026460	109	— 0,07464	— 0,020423	139	0,02093	0,004597	169	0,09237	0,024467
20	0,09214	0,022158	50	— 0,03670	— 0,006590	80	— 0,10814	— 0,026722	110	— 0,07202	— 0,019782	140	0,02417	0,005485	170	0,09347	0,024776
21	0,08835	0,021414	51	— 0,04060	— 0,007571	81	— 0,10863	— 0,026951	111	— 0,06933	— 0,019119	141	0,02739	0,006364	171	0,09446	0,025057
22	0,08446	0,020644	52	— 0,04443	— 0,008539	82	— 0,10899	— 0,027147	112	— 0,06657	— 0,018435	142	0,03056	0,007236	172	0,09535	0,025310
23	0,08048	0,019848	53	— 0,04816	— 0,009494	83	— 0,10922	— 0,027310	113	— 0,06374	— 0,017731	143	0,03370	0,008098	173	0,09614	0,025533
24	0,07642	0,019027	54	— 0,05182	— 0,010434	84	— 0,10932	— 0,027440	114	— 0,06085	— 0,017008	144	0,03679	0,008950	174	0,09683	0,025727
25	0,07228	0,018183	55	— 0,05539	— 0,011358	85	— 0,10930	— 0,027536	115	— 0,05791	— 0,016265	145	0,03984	0,009790	175	0,09741	0,025891
26	0,06807	0,017317	56	— 0,05886	— 0,012266	86	— 0,10915	— 0,027599	116	— 0,05492	— 0,015506	146	0,04284	0,010619	176	0,09788	0,026026
27	0,06380	0,016431	57	— 0,06224	— 0,013155	87	— 0,10887	— 0,027629	117	— 0,05186	— 0,014729	147	0,04579	0,011434	177	0,09826	0,026132
28	0,05948	0,015524	58	— 0,06552	— 0,014026	88	— 0,10847	— 0,027625	118	— 0,04877	— 0,013937	148	0,04868	0,012236	178	0,09852	0,026206
29	0,05510	0,014600	59	— 0,06869	— 0,014876	89	— 0,10794	— 0,027589	119	— 0,04563	— 0,013130	149	0,05152	0,013022	179	0,09868	0,026251
30	0,05069	0,013659	60	— 0,07176	— 0,015706	90	— 0,10730	— 0,027520	120	— 0,04245	— 0,012309	150	0,05429	0,013793	180	0,09873	0,026267

Die Tabelle für S und T, welche uns nun vollends in den Stand setzt, die Formänderungsgleichungen (10) der vorigen Ziffer explizite hinzuschreiben, folgt hierunter. Man überzeugt sich leicht, daß die rechten Seiten der Gln. (3) und (6) die Funktionen S und T auch in dem Gebiete $\pi \leq \psi \leq 2\pi$ darstellen, weil sie ihren Wert nicht ändern, wenn man ψ durch $(2\pi - \psi)$ ersetzt, so daß in der Tat, wie es sein muß, $S(2\pi - \psi) = S(\psi)$, $T(2\pi - \psi) = T(\psi)$ ist. Dagegen ändern sich die Werte der rechten Seiten von Gl. (3) und (6), wenn man ψ durch $-\psi$ ersetzt, und sie stellen denn auch, wie wir in bezug auf spätere Anwendungen ausdrücklich bemerken, für negative Argumente $S(\psi)$ und $T(\psi)$ nicht dar.

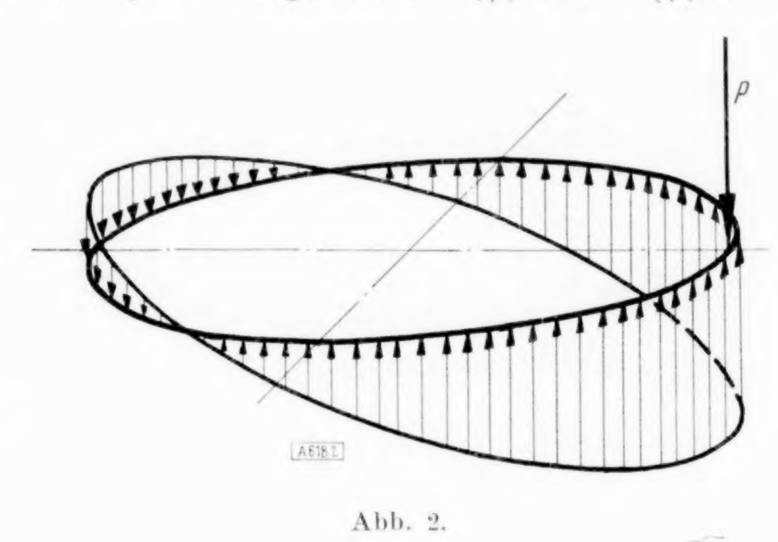


Abb. 2.

5. Zweite Methode zur Aufstellung der in Ziffer 3 erhaltenen Hauptgleichung (9). Zu der Hauptgleichung (9) der Ziffer 3 gerät man in ganz anderer Weise, wenn man den Ring zunächst durch eine Einzellast P mit der Winkelkoordinate $\varphi = 0$ belastet und dieser Kraft von einer kontinuierlichen Belastung

$$q = -\frac{P}{2\pi r}(1 + 2\cos\varphi)$$

das Gleichgewicht halten läßt. Für das in einem beliebigen Querschnitt $\varphi = \varphi_1$ auftretende Biegemoment M (siehe Abb. 2) erhält man nach der in Ziffer 1 gegebenen Vorschrift

$$\left.\begin{aligned} M &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2\pi} \frac{(\varphi - \varphi_1)}{2\pi} \cdot \frac{P}{2\pi r}(1 + 2\cos\varphi) \cdot r \sin(\varphi - \varphi_1) \cdot r\, d\varphi + \frac{2\pi - \varphi_1}{2\pi} P \cdot r \sin\varphi_1 \\ &= \frac{P r}{\pi}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}\pi \sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 \sin\varphi_1\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

und für das im selben Querschnitt auftretende Torsionsmoment W

$$\left.\begin{aligned} W &= -\int_{\varphi_1}^{2\pi + \varphi_1} \frac{\varphi - \varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{P}{2\pi r}(1 + 2\cos\varphi) \cdot r\,[1 - \cos(\varphi - \varphi_1)] \cdot r\, d\varphi + \frac{2\pi - \varphi_1}{2\pi} P \cdot r (1 - \cos\varphi_1) \\ &= \frac{P r}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{3}{4}\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_1 \cos\varphi_1\right) \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Setzt man die Ausdrücke (1) und (2) unter Weglassung des Index 1 beim Winkel φ in die Gl. (4) der Ziffer 2 ein, so erhält man als Differentialgleichung für ψ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \psi = \frac{r}{a_b}\frac{dM}{d\varphi} - \frac{W r}{a_t} &= \frac{P r^2}{\pi a_b}\left[-\frac{1}{4}\sin\varphi + \frac{1}{2}\pi\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi\right] \\ &\quad - \frac{P r^2}{\pi a_t}\left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\pi\cos\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi\right], \end{aligned}$$

deren Lösung lautet:

$$\left.\begin{aligned} \psi = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi &+ \frac{P r^2}{\pi a_b}\left(\frac{1}{4}\pi\varphi\sin\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\sin\varphi\right) \\ &+ \frac{P r^2}{\pi a_t}\left[-\frac{\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{1}{4}\pi\varphi\sin\varphi - \frac{1}{8}\varphi^2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\pi\right] \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Die Durchbiegung errechnet sich aus

$$y = \int \psi\, r\, d\varphi$$

zu

$$\left.\begin{aligned} y = C_1^* \sin\varphi + C_2^* \cos\varphi + C_3 + \frac{P r^3}{\pi a_b}\left[\frac{1}{8}\varphi^2\cos\varphi - \frac{1}{4}\pi\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\varphi\sin\varphi\right] \\ + \frac{P r^3}{\pi a_t}\left[\frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{\pi\varphi}{2} + \frac{1}{8}\varphi^2\cos\varphi - \frac{1}{4}\pi\varphi\cos\varphi - \frac{3}{4}\varphi\sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (4).$$

Die drei mit den Konstanten C_1^*, C_2^*, C_3 behafteten Glieder stellen eine Bewegung des Ringes als steifes Ganzes dar. Verfügt man über diese Konstanzen derart, daß gleichzeitig

$$\int_0^{2\pi} y\, r\, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} y\, r^2 \cos\varphi\, d\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} y\, r^2 \sin\varphi\, d\varphi = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

wird, so erhält man

$$\begin{aligned} y = \frac{P r^3}{\pi a_b}\left[-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{3}{16} - \frac{\pi}{4}\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right)\sin\varphi + \frac{\varphi^2\cos\varphi}{8}\right] \\ + \frac{P r^3}{\pi a_t}\left[-1 + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{4} + \left(\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{23}{16} - \frac{\pi}{4}\varphi + \frac{\varphi^2}{8}\right)\cos\varphi + \frac{3}{4}(\pi - \varphi)\sin\varphi\right], \end{aligned}$$

oder, wie der Vergleich mit den Gln. (3) und (6) der Ziffer 4 lehrt

$$y = \frac{P r^3}{\pi a_b} S(\varphi) + \frac{P r^3}{\pi a_t} T(\varphi) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6).$$

Hiermit ist eine einfache mechanische Deutung der Funktionen S und T gewonnen; stellt doch die rechts stehende Kombination beider Funktionen diejenige Durchbiegung y des Ringes dar, welche von einer im Punkte $\varphi = 0$ angreifenden Einzelkraft P erzeugt wird, wenn dieser Kraft von einer kontinuierlichen Belastung

$$q = -\frac{P}{2\pi r}(1 + 2\cos\varphi)$$

das Gleichgewicht gehalten wird, und außerdem die Nullebene, in bezug auf welche die Durchbiegung gemessen wird, derart gewählt wird, daß y die „Gleichgewichtsbedingungen" (5) erfüllt.

Ist der Ring von mehreren Kräften P_i mit den Winkelkoordinaten a_i belastet, deren jeder für sich von einer kontinuierlichen Belastung

$$q_i = \frac{P_i}{2\pi r}[1 + 2\cos(\varphi - a_i)]$$

das Gleichgewicht gehalten wird, und ist das Kräftesystem (P_i) selbst ein Gleichgewichtssystem, so ist die resultierende kontinuierliche Belastung q des Ringes

$$q = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{2\pi r}[1 + 2\cos(\varphi - a_i)]$$

identisch Null, weil der Voraussetzung nach

$$\Sigma P_i = 0, \qquad \Sigma P_i\, r\cos\varphi = 0, \qquad \Sigma P_i\, r\sin\varphi = 0$$

ist.

Hieraus folgt, daß die Durchbiegung eines von einem Gleichgewichtssystem von Kräften belasteten Ringes bis auf einen unbestimmt gelassenen Betrag

$$A + B\cos\varphi + C\sin\varphi$$

gleich

$$y = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_b} S(\varphi - a_i) + \frac{1}{a_t} T(\varphi - a_i)\right]\frac{P r^3}{\pi}$$

gesetzt werden kann, was in voller Übereinstimmung mit Gl. (9) von Ziffer 3 steht.

6. Der in gleichen Abständen gestützte Ring. Wir spezialisieren uns jetzt auf den in gleichen Abständen gestützten Ring, und zwar auf den technisch wohl immer vorkommenden Fall einer geraden Zahl von Stützen. Die Anzahl der Stützen sei n, ihre Winkelkoordinaten seien $\alpha_i = i\frac{2\pi}{n}$ oder, mit $\frac{2\pi}{n} = \psi$, $\alpha_i = i\,\psi\,(i = 1, 2 \ldots n)$. Als Aufgabe setzen wir uns die Bestimmung der Einflußlinie einer beliebigen Stützkraft (z. B. derjenigen des Stützpunktes n), für den Fall, daß eine Einzelkraft sich am Ringumfang entlang bewegt. Liegt diese Einflußlinie einmal vor, so sind damit nunmehr die Einflußlinien aller Stützkräfte bekannt, so daß diese Kräfte bei jeder beliebigen Belastung des Ringes berechnet werden können. Sind die äußeren Kräfte einmal bekannt, so ist die innere Kraftverteilung des Ringes nach der in Ziffer 1 gegebenen Vorschrift zu bestimmen.

Die gesuchte Einflußlinie erhält man bekanntlich in folgender Weise: man hebt die n-te (oder 0-te) Stütze auf, setzt an ihre Stelle eine Einheitskraft und bestimmt die zu dieser Kraft gehörige Durchbiegung des Ringes; diese stellt dann, in einem leicht zu bestimmenden Maßstab, die Einflußlinie der Stützkraft dar. Wir ändern diese Vorschrift etwas dahin ab, daß in dem Punkte (n) eine Einheitsdurchbiegung vorgeschrieben wird, und daß vorläufig die Größe der dazu erforderlichen Kraft P_n samt der von P_n in den übrigen Stützpunkten erzeugten Reaktionskräfte $P_1, \ldots P_{n-1}$ bestimmt werden.

Schreibt man die Hauptgleichung (9) der Ziffer 3 für einen beliebigen Stützpunkt $j \neq n$ unter Benutzung der in der vorigen Ziffer eingeführten Funktionen S und T an, so erhält man mit $\varphi = j\,\psi$, $\alpha_i = i\,\psi$

$$\left.\begin{array}{l} y_j = A + B\cos j\,\psi + C\sin j\,\psi + \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha_b} S\{|j-i|\,\psi\} + \frac{1}{\alpha_t} T\{|j-i|\,\psi\}\right]\frac{P_i r^3}{\pi} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1, 2 \ldots n-1) \end{array}\right\} \quad (1).$$

Dagegen soll im Punkte $\varphi = 2\pi = n\,\psi$

$$y_n = A + B\cos n\,\psi + C\sin n\,\psi + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha_b} S\{|n-i|\,\psi\} + \frac{1}{\alpha_t} T\{|n-i|\,\psi\}\cdot\frac{P_i r^3}{\pi} = 1 \quad (2)$$

sein.

Weil das Vorzeichen des Argumentes $(j-i)\,\psi$ positiv oder negativ sein kann, je nachdem $j \gtrless i$ ist, ist in den Gln. (1) und (2) dieses Argument mit seinem Absolutwert eingeführt worden. Versteht man unter $S(\psi)$ und $T(\psi)$ die Definitionsfunktionen (11) der Ziffer 3, so ist dieses überflüssig; versteht man dagegen unter $S(\psi)$ und $T(\psi)$ die rechten Seiten der Gln. (3) und (6) der Ziffer 4, so ist diese Maßnahme unerläßlich (vgl. die Schlußbemerkung der genannten Ziffer).

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\left[\frac{1}{\alpha_b} S\{|j-i|\,\psi\} + \frac{1}{\alpha_t} T\{|j-i|\,\psi\}\right] r^3 = \beta_{j-i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und ergänzt man die Gln. (1) und (2) mit den drei, für das Kräftesystem P_i geltenden Gleichgewichtbedingungen, so schreibt sich das zu lösende Gleichungssystem in der Form

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P_n = 0 \\ P_1 r\cos\psi + P_2 r\cos 2\psi + P_3 r\cos 3\psi + \ldots\ldots\ldots P_n r\cos n\,\psi = 0 \\ P_1 r\sin\psi + P_2 r\sin 2\psi + P_3 r\sin 3\psi + \ldots\ldots\ldots P_n r\sin n\,\psi = 0 \end{array}\right\} \; (4\text{a}) \\ \\ \left.\begin{array}{r} A + B\cos\psi + C\sin\psi + \beta_0 P_1 + \beta_1 P_2 + \beta_2 P_3 + \ldots\ldots\ldots \beta_{n-1} P_n = 0 \\ A + B\cos 2\psi + C\sin 2\psi + \beta_1 P_1 + \beta_0 P_2 + \beta_1 P_3 + \ldots\ldots\ldots \beta_{n-2} P_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \\ A + B\cos n\,\psi + C\sin n\,\psi + \beta_{n-1} P_1 + \beta_{n-2} P_2 + \beta_{n-3} P_3 + \ldots\ldots \beta_0 P_n = 1 \end{array}\right\} \; (4\text{b}) \end{array}\right\} \; (4).$$

Weil

$$\beta_{n-k} = \beta_k \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2} n\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

ist, kann die Zahl n der in (4b) vorkommenden Beiwerte β auf $\left(\frac{1}{2} n + 1\right)$ verringert werden.

Wir sehen davon ab, das System (4b) noch einmal mit dieser verringerten Anzahl von Beiwerten anzuschreiben; machen dafür darauf aufmerksam, daß wir bei der nun folgenden Lösung des Systems fortwährend von den Relationen (5) Gebrauch machen.

Zunächst bestimmen wir die Integrationskonstanten A, B und C. Addiert man die Gln. (4b), so erhält man, weil

$$\sum_{i=1}^{n} \cos i\,\psi = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \sin i\,\psi = 0$$

ist,

$$n\,A + (\beta_0 + \beta_1 + \ldots . \beta_{n-1})(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . P_n) = 1\,,$$

oder wegen der ersten Gl. (4a)

$$A = \frac{1}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Betrachtet man dieselben Gln. (4b) und addiert man sie abermals, nachdem diesmal im voraus die erstere mit $\cos\psi$, die zweite mit $\cos 2\,\psi, \ldots\ldots$ die n-te mit $\cos n\,\psi$ multipliziert wurde, so findet man mit Rücksicht auf (5)

$$\left.\begin{aligned}
&\Big[\sum_{i=1}^{n}\cos^2 i\,\psi\Big] B + \Big[\sum_{i=1}^{n}\cos i\,\psi \sin i\,\psi\Big] C \\
&+ P_1\Big[\beta_0\cos\psi + \beta_1(\cos 2\,\psi + \cos n\,\psi) + \beta_2\{\cos 3\,\psi + \cos(n-1)\,\psi\} + \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \beta_{\frac{n}{2}-1}\Big\{\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi + \cos\Big(\frac{1}{2}\,n+2\Big)\psi\Big\} + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n+1\Big)\psi\Big] \\
&+ P_2\Big[\beta_0\cos 2\,\psi + \beta_1\{\cos 3\,\psi + \cos\psi\} + \beta_2\{\cos 4\,\psi + \cos n\,\psi\} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \beta_{\frac{1}{2}n-1}\Big\{\cos\Big(\frac{1}{2}\,n+1\Big)\psi + \cos\Big(\frac{1}{2}\,n+3\Big)\psi\Big\} + \beta_{\frac{n}{2}}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n+2\Big)\psi \\
&\ \vdots \\
&+ P_n\Big[\beta_0\cos n\,\psi + \beta_1\{\cos\psi + \cos(n-1)\,\psi\} + \beta_2\{\cos 2\,\psi + \cos(n-2)\,\psi\} + \ldots . \\
&+ \beta_{\frac{1}{2}n-1}\Big\{\cos\Big(\frac{1}{2}\,n-1\Big)\psi + \cos\Big(\frac{1}{2}\,n+1\Big)\psi\Big\} + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi = \cos n\,\psi\Big]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7),$$

oder

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos 2\,i\,\psi)\Big] B + \Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\sin 2\,i\,\psi\Big] C \\
&+ P_1\cos\psi\Big[\beta_0 + 2\,\beta_1\cos\psi + 2\,\beta_2\cos 2\,\psi + \ldots\ldots\ldots 2\,\beta_{\frac{1}{2}n-1}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n-1\Big)\psi + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi\Big] \\
&+ P_2\cos 2\,\psi\Big[\beta_0 + 2\,\beta_1\cos\psi + 2\,\beta_2\cos 2\,\psi + \ldots\ldots 2\,\beta_{\frac{1}{2}n-1}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n-1\Big)\psi + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi\Big] \\
&\ \vdots \\
&+ P_n\cos n\,\psi\Big[\beta_0 + 2\,\beta_1\cos\psi + 2\,\beta_2\cos 2\,\psi + \ldots\ldots 2\,\beta_{\frac{1}{2}n-1}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n-1\Big)\psi + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi\Big] \\
&\hspace{25em} = \cos n\,\psi\,,
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,n\,B + \Big[\beta_0 + 2\,\beta_1\cos\psi + 2\,\beta_2\cos 2\,\psi + \ldots . 2\,\beta_{\frac{1}{2}n-1}\cos\Big(\frac{1}{2}\,n-1\Big)\psi + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,\psi\Big] \\
&\hspace{15em} \times \sum_{i=1}^{n} P_i\cos i\,\psi = \cos n\,\psi\,,
\end{aligned}$$

oder schließlich wegen der zweiten Gl. (4a)

$$B = \frac{2}{n}\cos n\,\varphi = \frac{2}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

In genau derselben Weise erhält man, wenn man anstatt der soeben verwendeten Multiplikatoren $\cos\psi$, $\cos 2\psi \ldots$, die Faktoren $\sin\psi$, $\sin 2\psi$ verwendet, die Gleichung

$$\frac{1}{2} n C + \left[\beta_0 + 2\beta_1 \sin\psi + 2\beta_2 \sin 2\psi + \ldots 2\beta_{\frac{1}{2}n-1} \sin\left(\frac{1}{2}n-1\right)\psi + \beta_{\frac{1}{2}n} \sin\frac{1}{2}n\psi\right] \times \sum_{i=1}^{n} P_i \sin i\psi = \sin n\psi ,$$

aus welcher, wegen der dritten Gl. (4a), jetzt

$$C = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

hervorgeht.

Nunmehr gehen wir zur Berechnung der Kräfte $P_1 \ldots P_n$ über.

Multipliziert man die erste Gl. (4b) mit $\cos k\psi$, die zweite mit $\cos 2k\psi$, usw. (k ganzzahlig und > 1) und addiert man die so erhaltenen neuen Gleichungen, so findet man

$$A\sum_{i=1}^{n}\cos ik\psi + B\sum_{i=1}^{n}\cos i\psi\cos ik\psi + C\sum_{i=1}^{n}\sin i\psi\cos ik\psi$$

$$+ P_1\Big[\beta_0\cos k\psi + \beta_1\{\cos 2k\psi + \cos nk\psi\} + \beta_2\{\cos 3k\psi + \cos(n-1)k\psi\} + \ldots\ldots$$
$$\beta_{\frac{1}{2}n-1}\left\{\cos\frac{1}{2}nk\psi + \cos\left(\frac{1}{2}n+2\right)k\psi\right\} + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\left(\frac{1}{2}n+1\right)k\psi\Big]$$

$$+ P_2\Big[\beta_0\cos 2k\psi + \beta_1\{\cos 3k\psi + \cos k\psi\} + \beta_2\{\cos 4k\psi + \cos nk\psi\} + \ldots\ldots$$
$$\beta_{\frac{1}{2}n-1}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}n+1\right)k\psi + \cos\left(\frac{1}{2}n+3\right)k\psi\right\} + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\left(\frac{1}{2}n+2\right)k\psi$$
$$\vdots$$
$$+ P_n\Big[\beta_0\cos nk\psi + \beta_1\{\cos k\psi + \cos(n-1)k\psi\} + \beta_2\{\cos 2k\psi + \cos(n-2)k\psi\} + \ldots$$
$$\beta_{\frac{n}{2}-1}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \cos\left(\frac{1}{2}n+1\right)k\psi\right\} + \beta_{\frac{n}{2}}\cos\frac{1}{2}nk\psi = \cos nk\psi .$$

Weil

$$\sum_{i=1}^{n}\cos ik\psi = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n}\cos i\psi\cos ik\psi = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n}\sin i\psi\cos ik\psi = 0$$

ist, fallen die Glieder mit A, B, C in dieser Gleichung fort. Transformiert man die Beiwerte der übrigbleibenden mit P_i behafteten Glieder genau so wie die korrespondierenden Glieder der Gln. (7), so erhält man

$$P_1\cos k\psi\left[\beta_0 + 2\beta_1\cos k\psi + 2\beta_1\cos 2k\psi + \ldots 2\beta_{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \beta_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}nk\psi\right]$$
$$+ P_2\cos 2k\psi\left[\beta_0 + 2\beta_1\cos k\psi + 2\beta_2\cos 2k\psi + \ldots 2\beta_{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \beta_{\frac{n}{2}}\cos\frac{1}{2}nk\psi\right]$$
$$\vdots$$
$$+ P_n\cos nk\psi\left[\beta_0 + 2\beta_1\cos k\psi + 2\beta_2\cos 2k\psi + \ldots 2\beta_{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \beta_{\frac{n}{2}}\cos\frac{1}{2}nk\psi\right]$$
$$= \cos nk\psi .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\cos nk\psi}{\left[\beta_0 + 2\beta_1\cos k\psi + 2\beta_2\cos 2k\psi + \ldots 2\beta_{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \beta_{\frac{n}{2}}\cos\frac{1}{2}nk\psi\right]} = \alpha_k \quad . \quad (10),$$

so läßt sich die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\cos ik\psi = \alpha_k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach $k=2, 3 \ldots \frac{1}{2}n$, so erhält man $\left(\frac{1}{2}n-1\right)$ Ersatzgleichungen des Systems (4b), in welchen die Beiwerte der Unbekannten P_i jetzt einfache Funktionen des Winkels ψ (und seiner ganzen Vielfache) sind.

Ähnliche Gleichungen findet man, wenn die Gln. (4b) der Reihe nach mit $\sin k\psi$, $\sin 2k\psi \ldots \left(k=2, 3 \ldots \frac{1}{2}n-1\right)$ usw. multipliziert und nachher addiert werden. In jenem Falle erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \sin i k \psi = b_k \qquad \left(k=2, 3, \ldots, \frac{n}{2}-1\right) \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

mit

$$\frac{\sin n k \psi}{\left[2\beta_1 \sin k\psi + 2\beta_2 \sin 2k\psi + \ldots . 2\beta_{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \beta_{\frac{n}{2}} \sin \frac{1}{2} n k \psi\right]} = b_k \quad . \quad (13).$$

Ergänzt man die Gln. (11) und (12) mit den drei Gln. (4a), so erhält man das folgende System von n Gleichungen für die n Kräfte P_i

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} P_i = a_0 = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} P_i \cos i\psi = a_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i \cos 2i\psi = a_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \frac{1}{2} n i \psi = a_{\frac{1}{2}n}, \\
\sum_{i=1}^{n} P_i \sin i\psi = b_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i \sin 2i\psi = b_2 = 0, \quad \ldots . \quad \sum_{i=1}^{n} P_i \sin\left(\frac{1}{2}n-1\right) i\psi = b_{\frac{1}{2}n-1} = 0
\end{array}\right\} \quad (14),$$

welches sich nunmehr in geschlossener Form lösen läßt. Denn multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\cos 0 \cdot j\psi$, die zweite mit $2\cos 1 \cdot j\psi$, die dritte mit $2\cos 2j\psi$, usw. die $\left(\frac{1}{2}n+1\right)^{-te}$ mit $\cos\frac{1}{2}nj\psi$, die nächstfolgenden Gleichungen der Reihe nach mit $2\sin 1 \cdot j\psi$, mit $2\sin 2j\psi$, $2\sin 3j\psi$, usw. und addiert man nachträglich die so gewonnenen neuen Gleichungen, so erhält im Additionsresultat die Kraft P_k den Beiwert

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk} = \Big[&\cos 0 j\psi \cos 0 k\psi + 2\cos 1 \cdot j\psi \cos 1 \cdot k\psi + 2\cos 2j\psi \cos 2k\psi + \ldots \ldots \\
&2\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)j\psi \cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)k\psi + \cos\frac{1}{2}nj\psi \cos\frac{1}{2}nk\psi \\
&+ 2\sin 1 \cdot j\psi \sin 1 \cdot k\psi + 2\sin 2j\psi \sin 2k\psi + \ldots . 2\sin\left(\frac{1}{2}n-1\right)\psi \sin\left(\frac{1}{2}n-1\right)\psi\Big]
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk} = \Big[&\cos 0 j\psi \cos 0 k\psi + 2\cos(j-k)\psi + 2\cos 2(j-k)\psi + \ldots \ldots \\
&2\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)(j-k)\psi + \cos\frac{1}{2}nj\psi \cos\frac{1}{2}nk\psi\Big].
\end{aligned}$$

Dieser Beiwert hat, wie man sofort sieht, für $k=j$ den Wert n. Für $k \neq j$ dagegen ist er Null, denn es ist, wenn zur Abkürzung $|j-k| = p$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk} &= 1 + 2\boldsymbol{R}\left[e^{ip\psi} + e^{2ip\psi} + \ldots \ldots e^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)p\psi}\right] + (-1)^p \\
&= 1 + (-1)^p + 2\boldsymbol{R} e^{ip\psi} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)ip\psi} - 1}{e^{ip\psi} - 1} \\
&= 1 + (-1)^p \\
&\quad + 2\boldsymbol{R} \frac{(\cos p\psi + i\sin p\psi)\left[\cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)p\psi + i\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)p\psi\right](\cos p\psi - 1 - i\sin p\psi)}{(\cos p\psi - 1 + i\sin\psi)(\cos p\psi - 1 - i\sin p\psi)}
\end{aligned}$$

$$= 1 + (-1)^p + 2\frac{\cos\left(\frac{1}{2}n - 1\right)p\,\psi - \cos\frac{1}{2}n\,p\,\psi + \cos p\,\psi - 1}{2(1 - \cos p\,\psi)}$$

oder, wegen $n\,\psi = 2\pi$

$$\gamma_{jk} = 1 + (-1)^p + 2\frac{[(-1)^p + 1]\cos p\,\psi - 1 - (-1)^p}{2(1 - \cos p\,\psi)} = 0 .$$

Man erhält als neue Gleichung:

$$n\,P_j = a_0 \cos 0\,j\,\psi + 2\,a_1 \cos 1\,j\,\psi + \ldots\ldots + 2\,a_{\frac{1}{2}n-1}\cos\left(\frac{1}{2}n - 1\right)j\,\psi + a_{\frac{1}{2}n}\cos\frac{1}{2}\,n\,j\,\psi \quad . \quad (15).$$

Weil sie für jeden Wert des Index $0 \leq j \leq n$ gültig ist, stellt sie die vollständige Lösung des Systems (13) dar. Wie es sein muß ist $P_{n-j} = P_j$.

7. Beispiel. Als Beispiel rechnen wir jetzt den auf acht Stützen gelagerten Ring vollständig durch.

Nach Ziffer **6**,14 ist, mit $n = 8$, $\psi = \frac{\pi}{4}$, $a_0 = a_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll}
P_1 = P_7 = \dfrac{a_0 + a_1\sqrt{2} - a_3\sqrt{2} - a_4}{8} & P_1 = -\dfrac{a_3\sqrt{2} + a_4}{8} \\[2ex]
P_2 = P_6 = \dfrac{a_0 - 2\,a_2 + a_4}{8} & P_2 = P_6 = \dfrac{-2\,a_2 + a_4}{8} \\[2ex]
P_3 = P_5 = \dfrac{a_0 - a_1\sqrt{2} + a_3\sqrt{2} - a_4}{8} & P_3 = P_5 = \dfrac{a_3\sqrt{2} - a_4}{8} \\[2ex]
P_4 = \dfrac{a_0 - 2\,a_1 + 2\,a_2 - 2\,a_3 + a_4}{8} & P_4 = \dfrac{2\,a_2 - 2\,a_3 + a_4}{8} \\[2ex]
P_8 = \dfrac{a_0 + 2\,a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_3 + a_4}{8} & P_8 = \dfrac{2\,a_2 + 2\,a_3 + a_4}{8}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Zur Berechnung der Beiwerte a_k $(k = 2, 3, 4)$ greifen wir auf Ziffer **6**,10 zurück und finden

$$a_2 = \frac{1}{\beta_0 - 2\,\beta_2 + \beta_4}; \qquad a_3 = \frac{1}{\beta_0 - \beta_1\sqrt{2} + \beta_2\sqrt{2} - \beta_4}; \qquad a_4 = \frac{1}{\beta_0 - 2\,\beta_1 + 2\,\beta_2 - 2\,\beta_3 + \beta_4} \quad . \quad (2).$$

Ferner entnimmt man Gl. (3)

$$(\beta_0 - 2\,\beta_2 + \beta_4) = \left\{\frac{1}{\alpha_b}\left[S(0) - 2\,S\left(\frac{\pi}{2}\right) + S(\pi)\right] + \frac{1}{\alpha_t}\left[T(0) - 2\,T\left(\frac{\pi}{2}\right) + T(\pi)\right]\right\}\frac{r^3}{\pi},$$

$$(\beta_0 - \beta_1\sqrt{2} + \beta_3\sqrt{2} - \beta_4) = \left\{\frac{1}{\alpha_b}\left[S(0) - \sqrt{2}\,S\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,S\left(\frac{3\pi}{4}\right) - S(\pi)\right] + \frac{1}{\alpha_t}\left[T(0) - \sqrt{2}\,T\left(\frac{\pi}{4}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{2}\,T\left(\frac{3\pi}{4}\right) - T(\pi)\right]\right\}\frac{r^3}{\pi},$$

$$(\beta_0 - 2\,\beta_1 + 2\,\beta_2 - 2\,\beta_3 + \beta_4) = \left\{\frac{1}{\alpha_b}\left[S(0) - 2\,S\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\,S\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,S\left(\frac{3\pi}{4}\right) + S(\pi)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha_t}\left[T(0) - 2\,T\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\,T\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,T\left(\frac{3\pi}{4}\right) + T(\pi)\right]\right\}\frac{r^3}{\pi},$$

und schließlich der Tabelle I von Ziffer 4

$$\left.\begin{array}{l}
\beta_0 - 2\,\beta_2 + \beta_4 = \left[\dfrac{0{,}448303}{\alpha_b} + \dfrac{0{,}111207}{\alpha_t}\right]\dfrac{r^3}{\pi} \\[2ex]
\beta_0 - \beta_1\sqrt{2} + \beta_3\sqrt{2} - \beta_4 = \left[\dfrac{0{,}069939}{\alpha_b} + \dfrac{0{,}007226}{\alpha_t}\right]\dfrac{r^3}{\pi} \\[2ex]
\beta_0 - 2\,\beta_1 + 2\,\beta_2 - 2\,\beta_3 + \beta_4 = \left[\dfrac{0{,}036020}{\alpha_b} + \dfrac{0{,}002225}{\alpha_t}\right]\dfrac{r^3}{\pi}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Zur Weiterführung des Beispiels muß jetzt ein numerischer Wert für das Verhältnis der beiden Steifigkeiten a_b und a_t angenommen werden. Es sei $a_b : a_t = 10$. Dann ist nach (2) und (3)

$$a_2 = \frac{\pi\, a_b}{1{,}560373\, r^3} = 0{,}640872\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}, \qquad a_3 = \frac{\pi\, a_b}{0{,}142199\, r^3} = 7{,}032398\,\frac{\pi\, a_b}{r^3},$$

$$a_4 = \frac{\pi\, a_b}{0{,}058270\, r^3} = 17{,}161490\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}$$

und nach Gl. (1)

$$P_1 = P_7 = -3{,}388350\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}; \qquad P_2 = P_6 = 1{,}984968\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}; \qquad P_3 = P_5 = -0{,}902022\,\frac{\pi\, a_b}{r^3};$$

$$P_4 = 0{,}547305\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}; \qquad P_0 = P_8 = 4{,}063504\,\frac{\pi\, a_b}{r^3}.$$

Nunmehr kann unter Benutzung der Tabelle I von Ziffer 4 die zu dem Kräftesystem P_i gehörige Durchbiegung

$$y = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S(\varphi - \alpha_i) + \frac{a_b}{a_t}\,T(\varphi - \alpha_i)\right]\frac{P_i\, r^3}{\pi\, a_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(vgl. Ziffer 3, 9) für jeden Punkt des Ringumfanges berechnet werden. Die rechte Seite der Gl. (4) ist dimensionlos, weil sie die in einem beliebigen Punkte (φ) des Kreisumfanges auftretende Durchbiegung pro Einheit von Durchbiegung im Punkte $\varphi = 0$ darstellt.

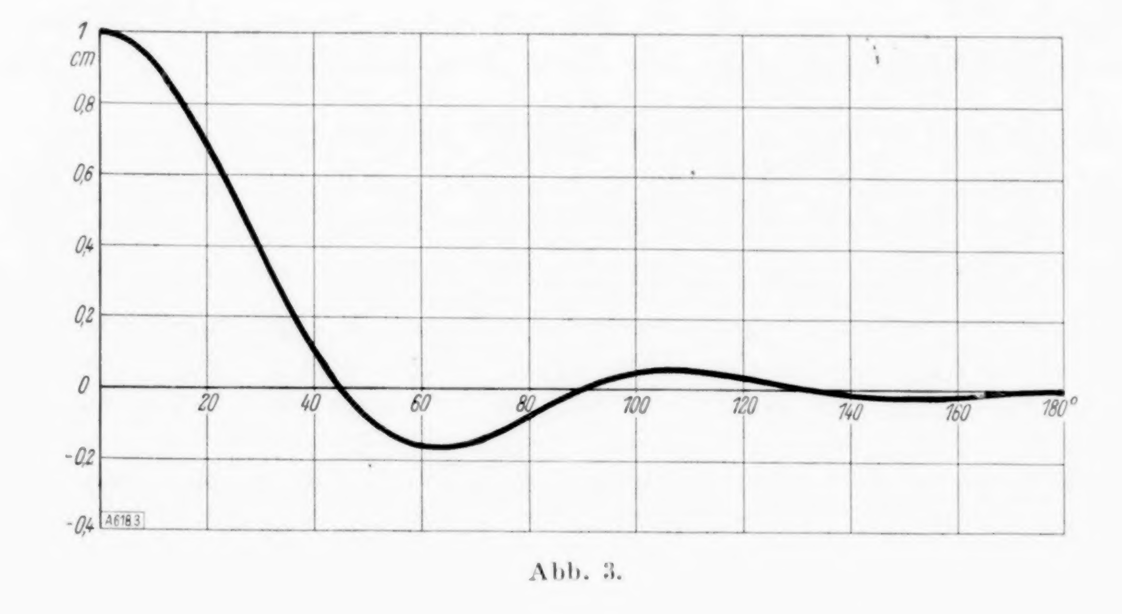


Abb. 3.

Legt man aber der Ordinate y die Bedeutung einer Kraft bei, und setzt man im besonderen die im Punkte $\varphi = 0$ auftretende Durchbiegung gleich der Einheitskraft, so stellt die mit diesem Maßstab gemessene Kurve (4) die Einflußlinie der betrachteten Stützkraft dar (vgl. Abb. 3). Mit Hilfe dieser einzigen Einflußlinie können — weil die Einflußlinien aller Stützkräfte kongruent sind — für jede beliebige äußere Kraft alle Stützkräfte bestimmt werden. Greift nämlich im Punkte φ eine Einheitskraft an, so werden die in den Stützpunkten $\varphi = \frac{\pi}{4}, 2\frac{\pi}{4} \ldots\ldots 7\frac{\pi}{4}$ auftretenden Stützkräfte durch die zu $\varphi - \frac{\pi}{4}$, $\varphi - 2\frac{\pi}{4}, \ldots\ldots \varphi - 7\frac{\pi}{4}$ gehörigen Ordinaten dargestellt.

Bei jeder vorgegebenen Belastung des Ringes können also die Reaktionskräfte ohne weiteres bestimmt werden, wonach zur definitiven Durchrechnung des Ringes auf das in der Einleitung erwähnte Hilfsmittel zurückgegriffen werden kann.

Zum Schlusse sei erwähnt, daß die Ordinaten der in Abb. 3 dargestellten Einflußlinie kaum von dem Verhältnis $a_b : a_t$ beeinflußt werden, so daß diese Kurve ohne jedes Bedenken für alle Werte von $a_b : a_t$ verwendet werden kann. 618

Die Bestimmung der Schubbeanspruchung beim Ausbeulen rechteckiger Platten.

Von *E. Trefftz* in Dresden und *Fr. A. Willers* in Freiberg.

Die bisherigen Arbeiten über die Scherknickung von Platten geben die kritische Schubkraft ohne untere Grenzen für die Genauigkeit des berechneten Wertes[1]). Technisch wichtig ist aber vor allem die Angabe einer unteren Grenze für diese Kraft. Bekanntlich ergibt die Anwendung des Ritzschen Verfahrens auf das entsprechende isoperimetrische Variationsproblem stets zu große Werte für die kritische Schubbeanspruchung. Unter Benutzung der auf diese Weise gefundenen Werte gewinnen wir folgendermaßen eine untere Grenze[2]). Bezeichnet man den genauen Betrag des n-ten Eigenwertes des Variationsproblemes mit λ_n, so berechnen wir zunächst eine obere und untere Grenze für die Summe der reziproken Quadrate von λ_n

$$Q = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Weiter bestimmen wir nach dem Ritzschen Verfahren für eine möglichst große Anzahl m von Eigenwerten obere Grenzen Λ_n. Mit diesen Werten ergibt sich eine untere Grenze z. B. für den ersten Eigenwert aus der Ungleichung

$$\sum_2^m \frac{1}{\Lambda_n^2} \leqq \sum_2^m \frac{1}{\lambda_n^2} \leqq \sum_2^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} = Q - \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \leqq Q - \sum_2^m \frac{1}{\Lambda_n^2}.$$

Also ist

$$|\lambda_1| \geqq \frac{1}{\sqrt{Q - \sum_2^m \frac{1}{\Lambda_n^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Ebenso kann man, wenn man eine genügende Anzahl von Λ_n bestimmt hat, auch für weitere Eigenwerte untere Grenzen gewinnen. Da in unserem Fall die Eigenwerte sehr nahe beieinanderliegen, so daß auch die höheren Werte noch einen merklichen Einfluß haben, sind zwar die so berechneten Grenzen, zwischen denen der gesuchte Wert von λ_1 liegt, nicht sehr eng, doch wird so zum ersten Male wirklich eine brauchbare untere Grenze für die kritische Schubbeanspruchung gewonnen.

1. Das Variationsproblem. Ebenso wie die Knicklast gedrückter rechteckiger Platten[3]) kann man die zur Ausbeulung führende Schubkraft mittels eines isoperimetrischen Variationsproblemes bestimmen. Es sei die Dicke der Platte h; E sei der Elastizitätsmodul, m die Querkontraktionszahl des Materials, $N = \frac{E h^3 m^2}{12(m^2-1)}$ der Plattenfaktor. Die beim Ausbeulen eintretende Verschiebung w kann man dann dadurch bestimmen, daß man das Doppelintegral

$$A = \frac{N}{2} \iint (\Delta w)^2 \, dx \, dy = \text{Minimum} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

macht unter der Bedingung, daß

$$F = \iint \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \, dx \, dy = \text{const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

[1]) S. z. B. Seydel: Ingenieurarchiv IV (1933), S. 169 bis 191 und die dort angegebene Literatur.
[2]) Trefftz: Math. Annalen 108 (1933), S. 595 bis 604.
[3]) Trefftz: ZAMM XV (1935), S. 339 bis 344.

ist. Beide Integrale sind über die ganze Platte zu erstrecken. Wo das im folgenden der Fall ist, werden wir die Grenzen fortlassen. Dazu kommt noch für den hier zu behandelnden Fall des einfach gelagerten Randes, daß am Rande

$$w = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

sein muß. Bezeichnet man mit ϱ den Lagrangeschen Faktor, so muß also

$$\delta A - \varrho \cdot \delta F = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

werden. Durch einfache Umformung ergibt sich nun aus (3)

$$\delta A = \iint N \Delta w \cdot \Delta \delta w \, dx \, dy = \iint N \Delta \Delta w \, \delta w \, dx \, dy + \int_R N \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \int_R N \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \delta w \, ds \quad . \quad (7)$$

und aus (4)

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= -\iint \delta w \, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \, dy + \int_l^r \delta w \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|_u^o dx + \int_u^o \delta w \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|_l^r dy \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8),$$

wo bei üblicher Lage des Koordinatensystems (der untere Plattenrand fällt in die x-Achse, der linke in die y-Achse) l und r linker bzw. rechter, u und o unterer bzw. oberer Rand bedeuten. Es kommen nun nur solche Variationen in Frage, die die Randbedingungen erfüllen, für die also am Rande $\delta w = 0$ ist; folglich werden die Randintegrale, in denen δw vorkommt, zu Null und man erhält durch Einsetzen von (7) und (8) in (6)

$$\delta A - \varrho \, \delta F = \iint (N \Delta \Delta w + 2 \varrho w_{xy}) \, \delta w \, dx \, dy + \int_R N \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds = 0 \quad \ldots \quad (9).$$

Flächen- und Randintegral müssen jedes für sich zu Null werden. Da das Flächenintegral für beliebige Werte δw verschwinden muß, kann das nur eintreten, wenn

$$N \Delta \Delta w + 2 \varrho w_{xy} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

ist. Ein Vergleich dieser Gleichung mit der in üblicher Weise abgeleiteten ergibt, daß $\varrho = -\tau \cdot h$ ist, wo τ die auf die Flächeneinheit des Randes ausgeübte Schubkraft ist, bei der ein Ausbeulen eintritt. Fordert man bei frei gelagerter Platte am Rande nur $w = 0$, so folgt aus (9), da das Randintegral für beliebige Randwerte von $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ Null werden muß, daß die Lösung des Variationsproblemes der Randbedingung $\Delta w = 0$ genügt.

2. Ableitung des Wertes von Q. Da es uns in der Hauptsache auf die Darstellung der angewandten Methode ankommt, beschränken wir uns auf die Bestimmung der Eigenwerte einer homogenen quadratischen Platte der Kantenlänge π. Machen wir für diese den die Randbedingungen erfüllenden Ansatz

$$w = \sum_h \sum_k c_{hk} \sin h x \cdot \sin k y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

so ergibt eine einfache Rechnung

$$A = \frac{1}{2} \iint N (\Delta w)^2 \, dx \, dy = \frac{\pi^2}{8} \sum_h \sum_k c_{hk}^2 (h^2 + k^2)^2 \cdot N \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und

$$\left.\begin{aligned} F &= \iint w_x \cdot w_y \, dx \, dy \\ &= \iint \Big(\sum_h \sum_k h \, c_{hk} \cos h x \cdot \sin k y \Big) \Big(\sum_\mu \sum_\nu c_{\mu\nu} \, \nu \sin \mu x \cos \nu y \Big) dx \, dy \\ &= \sum_h \sum_k \sum_\mu \sum_\nu c_{hk} \, c_{\mu\nu} \frac{-4 \mu \nu h k}{(\mu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)}; \quad \begin{pmatrix} \mu - h \\ \nu - k \end{pmatrix} \text{ungerade} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13).$$

Falls eine der beiden Differenzen $\mu - h$ bzw. $\nu - k$ oder beide gerade sind, ist das entsprechende Glied der vierfachen Summe gleich Null. Das gilt auch für die Gl. (14), (15), (16) und (18). Nach Ritz ist nun c_{hk} so zu bestimmen, daß $\frac{2}{N}(A - \varrho F)$ als Funktion der c_{hk} zu einem Minimum wird, das also, wenn man für $\frac{\varrho}{N}$ zur Abkürzung λ setzt

$$\frac{2}{N}\left(\frac{\partial A}{\partial c_{hk}} - \varrho \frac{\partial F}{\partial c_{hk}}\right) = \frac{\pi^2}{2} c_{hk} (h^2 + k^2)^2 + \lambda \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{8 \mu \nu h k}{(\mu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)} c_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad . \quad (14)$$

wird. Daraus berechnet sich

$$c_{hk} = -\frac{16}{\pi^2} \frac{\lambda}{(h^2 + k^2)^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\mu \nu h k}{(\mu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)} c_{\mu\nu} = \frac{16}{\pi^2} \frac{\lambda}{(h^2 + k^2)^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu\nu hk} c_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad (15),$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\left.\begin{aligned} a_{\mu\nu hk} &= \frac{-\mu \nu h k}{(\mu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)}, \text{ wenn } \mu - h,\ \nu - k \text{ ungerade}, \\ &= 0, \text{ wenn } \mu - h, \text{ oder } \nu - k \text{ oder beide gerade sind} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Setzt man nun für $c_{\mu\nu}$ den aus (15) folgenden Wert nochmals in dieselbe Gleichung ein, so wird

$$c_{hk} = \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 \frac{\lambda^2}{(h^2 + k^2)^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{a_{hk\mu\nu}}{(\mu^2 + \nu^2)^2} \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} a_{\mu\nu\varrho\sigma} c_{\varrho\sigma} \begin{pmatrix} h - \varrho \\ k - \sigma \end{pmatrix} \text{gerade} \quad . \quad . \quad (17).$$

Das ist ein System von unendlich vielen homogenen linearen Gleichungen für die Koeffizienten c_{hk}. Das Verfahren von Ritz besteht nun darin, daß man sich auf eine endliche Anzahl von Koeffizienten c_{11} bis c_{nn} beschränkt. Die Näherungswerte für λ, die man gewinnt, indem man die Determinante des Systems Null setzt, sind dann sämtlich größer (oder mindestens nicht kleiner) als die wahren Eigenwerte unseres Problems. Bekannt ist, daß die Näherungswerte für λ sich mit wachsendem n den wahren Werten nähern. Dieser Grenzübergang läßt sich aber nicht ausführen. Man kann aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\Lambda_\nu^{(n)2}} = Q$$

berechnen. Die Gleichungen haben nämlich die Form

$$x_h = \Lambda^2 \sum_{\nu=1}^{n} p_{h\nu} x_\nu .$$

In der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \frac{1}{\Lambda^2} & p_{12} & p_{13} & \cdots\cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \frac{1}{\Lambda^2} & p_{23} & \cdots\cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \frac{1}{\Lambda^2} & \cdots\cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots\cdots & p_{nn} - \frac{1}{\Lambda^2} \end{vmatrix} = 0$$

treten Glieder mit $\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)^n$ und $\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)^{n-1}$ nur in dem Produkt der Diagonalglieder

$$\left(p_{11} - \frac{1}{\Lambda^2}\right)\left(p_{22} - \frac{1}{\Lambda^2}\right) \cdots\cdots \left(p_{nn} - \frac{1}{\Lambda^2}\right)$$

auf, die entwickelte Gleichung beginnt also mit

$$\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)^n - \left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu\nu} \cdots\cdots$$

Folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\Lambda^2} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu\nu}.$$

Somit wird

$$Q = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu\nu}.$$

In unserm Fall wird die Summe der Diagonalglieder

$$Q = \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 \sum_h \sum_k \sum_\mu \sum_\nu \frac{h^2 k^2 \mu^2 \nu^2}{(h^2+k^2)^2 (\mu^2+\nu^2)^2 (\mu^2-h^2)^2 (\nu^2-k^2)^2} \left\{\begin{matrix}\mu - h \\ \nu - k\end{matrix}\right\} \text{ungerade} \quad (18).$$

Bezeichnet man mit u und v ungerade Zahlen, mit g und h gerade, so kann man diese Summe in 4 Teilsummen aufspalten, die sich aber wieder in 2 zusammenfassen lassen.

$$\left.\begin{aligned} Q = 2\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 \sum_h \sum_u h^2 u^2 \sum_g \frac{g^2}{(g^2+h^2)^2 (g^2-u^2)^2} \cdot \sum_v \frac{v^2}{(v^2+u^2)^2 (v^2-h^2)^2} \\ + 2\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2 \sum_u \sum_v u^2 v^2 \sum_g \frac{g^2}{(g^2+u^2)^2 (g^2-v^2)^2} \sum_h \frac{h^2}{(h^2+v^2)^2 (h^2-u^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad (19).$$

3. Summationsformeln. Die in (19) auftretenden vierfachen Summen kann man in Doppelsummen umwandeln. Die dazu nötigen Summenformeln sollen hier zunächst zusammengestellt werden. Aus der bekannten Partialbruchzerlegung des Tangens

$$\sum_u \frac{1}{u^2 - z^2} = \frac{\pi}{4z} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} \quad (20),$$

wo in der Summe für u alle positiven ungeraden ganzen Zahlen zu setzen sind, folgt, wenn man z durch iz ersetzt:

$$\sum_u \frac{1}{u^2 + z^2} = \frac{\pi}{4z} \operatorname{\mathfrak{Tg}} \frac{\pi z}{2} \quad (21).$$

Durch Differentiation nach z erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$\sum_u \frac{1}{(u^2 - z^2)^2} = -\frac{\pi}{8z^3} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi^2}{16 z^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi z}{2}} \quad (22),$$

$$\sum_u \frac{1}{(u^2 + z^2)^2} = \frac{\pi}{8z^3} \operatorname{\mathfrak{Tg}} \frac{\pi z}{2} - \frac{\pi^2}{16 z^2} \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi z}{2}} \quad (23).$$

Ebenso erhält man aus der Teilbruchzerlegung des Kotangens

$$\sum_g \frac{1}{g^2 - z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{\pi}{4z} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} \quad (24),$$

wo für g alle positiven geraden Zahlen von 2 ab einzusetzen sind, durch Einsetzen von iz für z

$$\sum_g \frac{1}{g^2 + z^2} = -\frac{1}{2z^2} + \frac{\pi}{4z} \operatorname{\mathfrak{Ctg}} \frac{\pi z}{2} \quad (25)$$

und aus diesen beiden Formeln ergibt sich durch Differentiation

$$\sum_g \frac{1}{(g^2 - z^2)^2} = -\frac{1}{2z^4} + \frac{\pi}{8z^3} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi^2}{16 z^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{2}} \quad (26).$$

$$\sum_g \frac{1}{(g^2 + z^2)^2} = -\frac{1}{2z^4} + \frac{\pi}{8z^3} \operatorname{\mathfrak{Ctg}} \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi^2}{16 z^2} \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi z}{2}} \quad (27).$$

In unseren Summen ist für z entweder eine gerade oder eine ungerade ganze Zahl zu setzen. Die sich so ergebenden Formeln schreiben wir hin, um sie für den Gebrauch bereit zu haben.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_u \frac{1}{u^2-g^2}=0; && \sum_u \frac{1}{u^2+v^2}=\frac{\pi}{4\,v}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi\,v}{2};\\
&\sum_u \frac{1}{(u^2-g^2)^2}=\frac{\pi^2}{16\,g^2}; && \sum_u \frac{1}{(u^2+v^2)^2}=\frac{\pi}{8\,v^3}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi\,v}{2}-\frac{\pi^2}{16\,v^2}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi\,v}{2}};\\
&\sum_g \frac{1}{(g^2-u^2)}=\frac{1}{2\,u^2}; && \sum_g \frac{1}{g^2+h^2}=-\frac{1}{2\,h^2}+\frac{\pi}{4\,h}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,h}{2};\\
&\sum_g \frac{1}{(g^2-u^2)^2}=-\frac{1}{2\,u^4}+\frac{\pi^2}{16\,u^2}; && \sum_g \frac{1}{(g^2+h^2)^2}=-\frac{1}{2\,h^4}+\frac{\pi}{8\,h^3}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,h}{2}+\frac{\pi^2}{16\,h^2}\,\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi\,h}{2}};\\
&\sum_g \frac{1}{g^2+u^2}=-\frac{1}{2\,u^2}+\frac{\pi}{4\,u}\,\mathrm{Cot}\,\frac{\pi\,u}{2}; && \sum_g \frac{1}{(g^2+u^2)^2}=-\frac{1}{2\,u^4}+\frac{\pi}{8\,u^3}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,u}{2}+\frac{\pi^2}{16\,u^2}\,\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi\,u}{2}}
\end{aligned}\right\}\quad (28).$$

4. Umwandlung der vierfachen Summe in eine Doppelsumme. Die in Formel (19) abgeteilten einfachen Summen kann man nun durch Partialbruchzerlegung aufspalten. Es treten dann in den Teilbrüchen die Summen auf, die in (28) zusammengestellt sind. Diese sind in den folgenden Formeln eingesetzt und gleichzeitig sind die einzelnen Glieder soweit als möglich zusammengezogen. Für die drei verschiedenen einfachen Summen der Formel (19) ergibt sich so:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_g \frac{g^2}{(g^2+h^2)^2\,(g^2-u^2)^2}&=\frac{u^2}{(u^2+h^2)^2}\sum_g\frac{1}{(g^2-u^2)^2}-\frac{h^2}{(u^2+h^2)^2}\sum_g\frac{1}{(g^2+h^2)^2}\\
&-\frac{u^2-h^2}{(u^2+h^2)^3}\sum_g\frac{1}{g^2-u^2}+\frac{u^2-h^2}{(u^2+h^2)^3}\sum_g\frac{1}{g^2+h^2}\\
&=\frac{\pi^2}{16\,(u^2+h^2)^2}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi\,h}{2}}\right)+\frac{\pi}{8\,h}\,\frac{u^2-3\,h^2}{(u^2+h^2)^3}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,h}{2}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (29),$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_v \frac{v^2}{(v^2+u^2)^2\,(v^2-h^2)^2}&=\frac{h^2}{(u^2+h^2)^2}\sum_v\frac{1}{(v^2-h^2)^2}-\frac{u^2}{(u^2+h^2)^2}\sum_v\frac{1}{(v^2+u^2)^2}\\
&-\frac{h^2-u^2}{(u^2+h^2)^3}\sum_v\frac{1}{v^2-h^2}+\frac{h^2-u^2}{(u^2+h^2)^3}\sum_v\frac{1}{v^2+u^2}\\
&=\frac{\pi^2}{16\,(u^2+h^2)^2}\left(1+\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi\,u}{2}}\right)+\frac{\pi}{8\,u}\,\frac{(h^2-3\,u^2)}{(u^2+h^2)^3}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi\,u}{2}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (30),$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_g \frac{g^2}{(g^2+u^2)^2\,(g^2-v^2)^2}&=\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\sum_g\frac{1}{(g^2-v^2)^2}-\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}\sum_g\frac{1}{(g^2+u^2)^2}\\
&-\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^3}\sum_g\frac{1}{g^2-v^2}+\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^3}\sum_g\frac{1}{g^2+u^2}\\
&=\frac{\pi^2}{16\,(u^2+v^2)^2}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi\,v}{2}}\right)+\frac{\pi\,(u^2-3\,v^2)}{8\,v\,(u^2+v^2)^3}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,v}{2}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (31).$$

Setzt man diese Werte in (19) ein und multipliziert aus, so wird

$$\left.\begin{aligned}
Q = {} & 2 \sum_h{}' \sum_u{}' \frac{h^2 u^2}{(h^2+u^2)^4}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi h}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi u}{2}}\right) \\
& + \frac{4}{\pi} \sum_h{}' \sum_u{}' \frac{(h^2 - 3u^2)\, h^2 u}{(u^2+h^2)^5}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi h}{2}}\right)\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi u}{2} \\
& + \frac{4}{\pi} \sum_h{}' \sum_u{}' \frac{(u^2 - 3h^2)\, u^2 h}{(u^2+h^2)^5}\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi u}{2}}\right)\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi h}{2} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_h{}' \sum_u{}' \frac{(u^2 - 3h^2)(h^2 - 3u^2)\, h \cdot u}{(u^2+h^2)^6}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi u}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi h}{2} \\
& + 2 \sum_u{}' \sum_v{}' \frac{u^2 v^2}{(u^2+v^2)^4}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi u}{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi v}{2}}\right) \\
& + \frac{8}{\pi} \sum_u{}' \sum_v{}' \frac{(u^2 - 3v^2)\, u^2 v}{(u^2+v^2)^5}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, \frac{\pi u}{2}}\right)\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi v}{2} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_u{}' \sum_v{}' \frac{(u^2 - 3v^2)(v^2 - 3u^2)\, u \cdot v}{(u^2+v^2)^6}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi u}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi v}{2}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (33).$$

Weiterhin werden wir die 7 hier auftretenden Summanden der Reihe nach mit A_1 bis A_7 bezeichnen. Die Faktoren, welche die Hyperbelfunktionen enthalten, nähern sich mit wachsendem Argument alle sehr schnell dem Wert 1, so daß sie in den Doppelsummen, abgesehen von den Anfangsgliedern, nur die Randglieder beeinflussen. Diese werden aber bedeutend schneller klein als die weit überwiegende Zahl der Nicht-Randglieder. Berechnet man eine größere Zahl von Anfangsgliedern, so kann man bei der Restabschätzung diese Faktoren vernachlässigen, da sie die Ziffern der dabei benutzten Stellen nicht mehr beeinflussen.

5. Berechnung der Doppelsummen. Zur Berechnung des Wertes der Doppelsummen werden die einzelnen Summanden bis zu einem genügend großen u, h bzw. u, v berechnet und addiert und der Rest mittels eines Doppelintegrales abgeschätzt. Ist der Wert des Doppelintegrales absolut genommen größer als der Summenrest, so erhält man bei positiver Summe obere bzw. untere Grenzen, wenn man für den Rest das Integral hinzufügt bzw. diesen Rest vernachlässigt. Bei negativem Summenwert ist es umgekehrt.

Um festzustellen, von welchen Indizes ab das Integral größer ist als das entsprechende Summenglied, benutzen wir die folgende, durch partielle Integration abzuleitende Kubaturformel. (Die Ableitungen nach x bzw. y sind durch den Index 1. bzw. 2. bezeichnet)

$$J = \int_{-x}^{+x}\int_{-y}^{+y} f(\xi, \eta)\, d\xi \cdot d\eta = 4 f(0,0)\, x y + \frac{2}{3}\left(f_{11}(0,0)\, x^2 + f_{22}(0,0)\, y^2\right) x y + K \quad . \; . \quad (34),$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
K = {} & 2y \int_0^x \left[f_{1111}(\xi, 0) + f_{1111}(-\xi, 0)\right] \frac{(x-\xi)^4}{24}\, d\xi \\
& + 2x \int_0^y \left[f_{2222}(0, \eta) + f_{2222}(0, -\eta)\right] \frac{(y-\eta)^4}{24}\, d\eta \\
& + \int_0^x\int_0^y \frac{(x-\xi)^2}{2}\,\frac{(y-\eta)^2}{2}\left[f_{1122}(\xi,\eta) + f_{1122}(-\xi,\eta) + f_{1122}(-\xi,-\eta) + f_{1122}(\xi,-\eta)\right] d\xi\, d\eta
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (35)$$

ist. In unserem Falle, wo in den Summen in jeder Richtung entweder nur die geraden oder nur die ungeraden Glieder auftreten, haben wir $x = +1$, $y = +1$ zu setzen. Das Volumen eines prismatischen Körpers, der oben von der Fläche $f(x, y)$ begrenzt wird und auf einem

Quadrat der Grundfläche 4 steht, wird dann in dieser Formel mit einem Quader über der gleichen Grundfläche verglichen, dessen Höhe gleich der des ersten Körpers in der Mitte des Quadrates ist. Die Abschätzung wenden wir getrennt auf die positiven und negativen Teile unserer Summen an. Dann haben wir es stets mit Funktionen der Form $\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{m+n}}$ zu tun. Für diese ist für die in Frage kommenden m und n für positive x und y $\Delta f = f_{11} + f_{22}$ stets größer als Null. Die Summe wird also kleiner als das Integral sein, wenn der kleinste Wert von K absolut genommen kleiner als $\frac{2}{3}\Delta f$ ist. Bezeichnet man mit $\overline{f_{1111}}$ usw. den absoluten Betrag der kleinsten Werte des betreffenden Gebietes, so muß also

$$\frac{1}{30}(\overline{f_{1111}} + \overline{f_{2222}}) + \frac{1}{9}\overline{f_{1122}} \leqq \frac{2}{3}(f_{11} + f_{22}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

sein. Für die Abschätzung führt man praktisch Polarkoordinaten r, ϑ ein. Man zeichnet dann die auf der linken Seite der Ungleichung (36) auftretende Funktion von ϑ auf und entnimmt aus dieser Kurve eine untere Grenze für diese Funktion. Gibt man die nächst größere ganze Zahl für r, so ergibt diese Abschätzung, die hier im einzelnen nicht durchgeführt werden soll, daß das Integral größer als die Summe ist

für die Funktion $\frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^4}$, wenn $r \geqq 4$

„ „ „ $\frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^5}$ „ $r \geqq 7$

„ „ „ $\frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^5}$ „ $r \geqq 7$

„ „ „ $\frac{x^3 y^3}{(x^2+y^2)^6}$ „ $r \geqq 4$

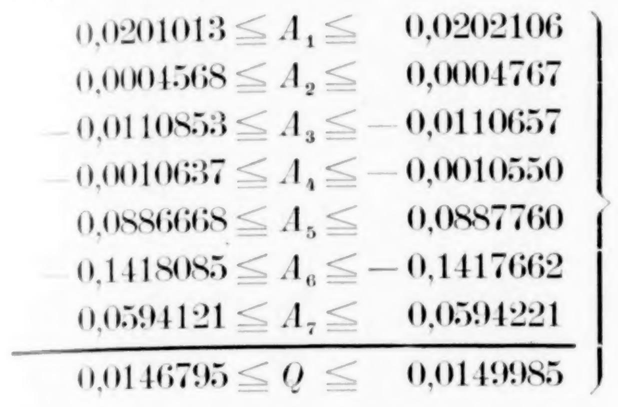
„ „ „ $\frac{x^5 y + x y^5}{(x^2+y^2)^6}$ „ $r \geqq 6$

ist. Nun wurden in A_1 und A_5 die Glieder bis $h = 34$, u bzw. $v = 35$, in A_2, A_3 und A_6 bis $h = 20$ und u bzw. $v = 19$ und in A_4 und A_7 bis $h = 10$ und u bzw. $v = 11$ berechnet, und zwar wurden die einzelnen Glieder auf neun Stellen hinter dem Komma bestimmt. In allen Fällen wurden also weit mehr Glieder berechnet, wie das zur Anwendung der Abschätzungsformel nötig wäre. Der Grund ist natürlich der, daß man für die Summen genügend enge Grenzen haben muß.

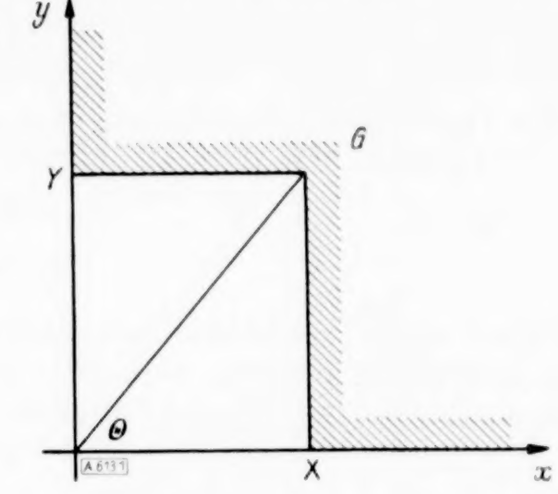
Das für die Fehlerabschätzung nötige Doppelintegral muß nun über ein Gebiet erstreckt werden, das aus dem ersten Quadranten besteht, aus dem ein Rechteck ausgespart ist. Z. B. ergibt sich als Korrektur für die Summen A_1 und A_5 das folgende Integral

$$\left.\begin{aligned} J &= \iint_G \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^4}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_r^{\infty} \frac{\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta}{r^3}\, dr\, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2X^2}\int_0^{\Theta} \cos^4\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{2Y^2}\int_{\Theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{1}{128X^2}\left(4\Theta + \sin 2\Theta - \sin 4\Theta - \frac{1}{3}\sin 6\Theta\right) \\ &+ \frac{1}{128Y^2}\left(2\pi - 4\Theta + \sin 2\Theta + \sin 4\Theta - \frac{1}{3}\sin 6\Theta\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

In der Summe A_1 ist $X=35$, $Y=36$, also $\operatorname{tg}\Theta=\frac{36}{35}$, $\Theta=45^\circ\,48'\,24''$ zu setzen, während in A_5 $X=Y=36$ und folglich $\Theta=45^\circ$ ist. Im Falle A_1 findet man für den Wert des Integrales $J_1=0{,}0000546$, im Falle A_5 wird $J_5=0{,}0000542$. In ganz ähnlicher Art werden die Integrale für die positiven und negativen Teile der übrigen Doppelsummen berechnet. Es ergeben sich damit für diese die folgenden Grenzen:



$$\left.\begin{array}{rcl}
0{,}0201013 \leqq & A_1 & \leqq 0{,}0202106 \\
0{,}0004568 \leqq & A_2 & \leqq 0{,}0004767 \\
-0{,}0110853 \leqq & A_3 & \leqq -0{,}0110657 \\
-0{,}0010637 \leqq & A_4 & \leqq -0{,}0010550 \\
0{,}0886668 \leqq & A_5 & \leqq 0{,}0887760 \\
-0{,}1418085 \leqq & A_6 & \leqq -0{,}1417662 \\
0{,}0594121 \leqq & A_7 & \leqq 0{,}0594221 \\
\hline
0{,}0146795 \leqq & Q & \leqq 0{,}0149985
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$



6. Berechnung oberer Grenzen für die Eigenwerte. Zu große Beträge für die Eigenwerte liefert wie erwähnt das Verfahren von Ritz, das zu der Gl. (15) führte

$$c_{hk}=-\frac{16}{\pi^2}\frac{\Lambda}{(h^2+k^2)^2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\mu\,\nu\,h\,k}{(\mu^2-h^2)(\nu^2-k^2)}\,c_{\mu\nu}\quad(\mu-k,\ \nu-k)\ (\text{ungerade})\quad . \quad (39).$$

Zur Berechnung der Λ benutzen wir nun die ersten 25 Gleichungen, für die die h und k bzw. die μ und ν die Werte 1 bis 5 annehmen. In einer Gruppe von 13 dieser Gleichungen kommen nur solche c_{hk} vor, für die die Summe der Indizes gerade ist, während in der zweiten Gruppe von 12 Gleichungen nur die c_{hk} mit ungerader Indexsumme auftreten. Setzt man noch zur Abkürzung $x=\frac{16}{\pi^2}\lambda$, so lautet die Determinantengleichung der ersten Gruppe

$$\begin{vmatrix}
4 &&&&&&&&& +\frac{4}{9}x & +\frac{8}{45}x & +\frac{8}{45}x & +\frac{16}{225}x \\
& 100 &&&&&&&& -\frac{4}{5}x & +\frac{8}{7}x & -\frac{8}{25}x & +\frac{16}{35}x \\
&& 100 &&&&&&& -\frac{4}{5}x & -\frac{8}{25}x & +\frac{8}{7}x & +\frac{16}{35}x \\
&&& 324 &&&&&& +\frac{36}{25}x & -\frac{72}{35}x & -\frac{72}{35}x & +\frac{144}{49}x \\
&&&& 676 &&&&& -\frac{20}{63}x & -\frac{40}{27}x & -\frac{8}{63}x & -\frac{16}{27}x \\
&&&&& 676 &&&& -\frac{20}{63}x & -\frac{8}{63}x & -\frac{40}{27}x & -\frac{16}{27}x \\
&&&&&& 1156 &&& +\frac{4}{7}x & +\frac{8}{3}x & -\frac{40}{49}x & -\frac{80}{21}x \\
&&&&&&& 1156 && +\frac{4}{7}x & -\frac{40}{49}x & +\frac{8}{3}x & -\frac{80}{21}x \\
&&&&&&&& 2500 & +\frac{100}{441}x & +\frac{200}{189}x & +\frac{200}{189}x & +\frac{400}{81}x \\
\frac{4}{9}x & -\frac{4}{5}x & -\frac{4}{5}x & +\frac{36}{25}x & -\frac{20}{63}x & -\frac{20}{63}x & +\frac{4}{7}x & +\frac{4}{7}x & +\frac{100}{441}x & 64 &&& \\
\frac{8}{45}x & +\frac{8}{7}x & -\frac{8}{25}x & -\frac{72}{35}x & -\frac{40}{27}x & -\frac{8}{63}x & +\frac{8}{3}x & -\frac{40}{49}x & +\frac{200}{189}x && 400 && \\
\frac{8}{45}x & -\frac{8}{25}x & +\frac{8}{7}x & -\frac{72}{35}x & -\frac{8}{63}x & -\frac{40}{27}x & -\frac{40}{49}x & +\frac{8}{3}x & +\frac{200}{189}x &&& 400 & \\
\frac{16}{225}x & +\frac{16}{35}x & +\frac{16}{35}x & +\frac{144}{49}x & -\frac{16}{27}x & -\frac{16}{27}x & -\frac{80}{21}x & -\frac{80}{21}x & +\frac{400}{81}x &&&& 1024
\end{vmatrix}=0\,.$$

Formt man diese Determinante in bekannter Weise um, so erhält man zunächst eine vierreihige Determinante. Diese zerlegt sich in einen in x^2 linearen Faktor und in einen zweiten Faktor, der gleich Null gesetzt eine Gleichung dritten Grades in x^2 liefert. Aus diesen Gleichnngen ergeben sich die acht Eigenwerte

$$\Lambda_1 = \pm\, 18{,}547\,; \qquad \Lambda_2 = \pm\, 50{,}11\,; \qquad \Lambda_3 = \pm\, 66{,}32\,; \qquad \Lambda_4 = \pm\, 85{,}86\,.$$

Die Determinantengleichung der zweiten Gruppe lautet:

$$\begin{vmatrix}
25 & & & & & & -\frac{4}{9}x & +\frac{4}{5}x & +\frac{20}{63}x & -\frac{8}{45}x & +\frac{8}{25}x & +\frac{8}{63}x \\
 & 169 & & & & & +\frac{4}{5}x & -\frac{36}{25}x & -\frac{4}{7}x & -\frac{8}{7}x & +\frac{72}{35}x & +\frac{40}{49}x \\
 & & 841 & & & & +\frac{20}{63}x & -\frac{4}{7}x & -\frac{100}{441}x & +\frac{40}{27}x & -\frac{8}{3}x & -\frac{200}{189}x \\
 & & & 289 & & & -\frac{8}{45}x & -\frac{8}{7}x & +\frac{40}{27}x & -\frac{16}{225}x & -\frac{16}{35}x & +\frac{16}{27}x \\
 & & & & 625 & & +\frac{8}{25}x & +\frac{72}{35}x & -\frac{8}{3}x & -\frac{16}{35}x & -\frac{144}{49}x & +\frac{80}{21}x \\
 & & & & & 1681 & +\frac{8}{63}x & +\frac{40}{49}x & -\frac{200}{189}x & +\frac{16}{27}x & +\frac{80}{21}x & -\frac{400}{81}x \\
-\frac{4}{9}x & +\frac{4}{5}x & +\frac{20}{63}x & -\frac{8}{45}x & +\frac{8}{25}x & +\frac{8}{63}x & 25 & & & & & \\
+\frac{4}{5}x & -\frac{36}{25}x & -\frac{4}{7}x & -\frac{8}{7}x & +\frac{72}{35}x & +\frac{40}{49}x & & 169 & & & & \\
+\frac{20}{63}x & -\frac{4}{7}x & -\frac{100}{441}x & +\frac{40}{27}x & -\frac{8}{3}x & -\frac{200}{189}x & & & 841 & & & \\
-\frac{8}{45}x & -\frac{8}{7}x & +\frac{40}{27}x & -\frac{16}{225}x & -\frac{16}{35}x & +\frac{16}{27}x & & & & 289 & & \\
+\frac{8}{25}x & +\frac{72}{35}x & -\frac{8}{3}x & -\frac{16}{35}x & -\frac{144}{49}x & +\frac{80}{21}x & & & & & 625 & \\
+\frac{8}{63}x & +\frac{40}{49}x & -\frac{200}{189}x & +\frac{16}{27}x & +\frac{80}{21}x & -\frac{400}{81}x & & & & & & 1681
\end{vmatrix} = 0\,.$$

Addiert man in der rechts oben bzw. links unten stehenden sechsreihigen Teildeterminante zur ersten Reihe $\frac{7}{18}$-tel der zweiten und $\frac{21}{50}$-tel der dritten, so erhält man in der ersten Reihe nur Nullen. Das gleiche ist in der letzten Reihe der Fall, wenn man zur sechsten Reihe $\frac{25}{27}$-tel der fünften und $\frac{50}{21}$-tel der vierten addiert. Ebenso kann man auch die Glieder der ersten und der letzten Spalte dieser Determinanten zu Null machen. Daraus folgt, daß die aus der Determinante folgende Gleichung höchstens von achtem Grade in x sein kann. Zur Berechnung der Wurzelwerte formt man die Determinante in eine sechsreihige um, die nur konstante Glieder und Glieder mit x^2 enthält und findet aus dieser durch Eingabeln

$$\Lambda_5 = \pm\, 23{,}13\,; \qquad \Lambda_6 = \pm\, 54{,}14\,; \qquad \Lambda_7 = \pm\, 62{,}88\,; \qquad \Lambda_8 = \pm\, 99{,}52\,.$$

Damit hat man alle Zahlen zur Bestimmung der unteren Grenze des ersten Eigenwertes beisammen. Berücksichtigt man nur die positiven Werte und nimmt für Q sinngemäß die obere Grenze, so wird nach Gl. (2)

$$\lambda_1 \geqq 1 : \sqrt{\frac{Q}{2} - \sum_{2}^{8} \frac{1}{\Lambda_n^2}} \geqq 1 : \sqrt{0{,}00750 - 0{,}00332} = 15{,}5\,.$$

Als Resultat unserer Abschätzung ergibt sich also, daß die kritische Schubspannung einer quadratischen Platte zwischen

$$\frac{7{,}75\,N}{h} \leqq \tau \leqq \frac{9{,}27\,N}{h}$$

liegt.

Vorträge der Hauptversammlung in Dresden der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

Von den auf der Versammlung in Dresden vom 24. bis 26. September gehaltenen Vorträgen bringen wir im folgenden die von den einzelnen Vortragenden selbst zur Verfügung gestellten Vortragsauszüge. Die vollständige Veröffentlichung einzelner Vorträge bleibt vorbehalten.

Schmiegungskegelschnitte und ihre Anwendung in der praktischen Analysis und Kinematik.

Von *R. Beyer* in Zwickau (Sa.).

Eine wichtige Aufgabe der Getriebetechnik ist der Ersatz der Bahnkurve eines Punktes C eines bewegten Getriebegliedes durch eine andere Kurve, die sich gut an die Kurve anschmiegt und außerdem kinematisch leicht erzeugbar ist. Bekannt ist die Verwendung vier- und fünfpunktig berührender Krümmungskreise zum Entwurf von Stillstandgetrieben, Geradführungen u. a.

Es soll nun nach Kegelschnitten gefragt werden, die eine Kurve von der Gleichung $y=f(x)$ in vier, fünf und mehr unendlich nahe benachbarten Punkten berühren. Vom Standpunkt der Getriebetechnik interessiert vor allem der Fall, wenn insbesondere der Kegelschnitt eine Ellipse ist, die sich bekanntlich mit Hilfe der Kreuzschleifenkette oder des Kardankreispaares leicht erzeugen läßt. Eine solche hat für das beliebig zugrunde gelegte Achsenkreuz die Gleichung:

$$b^2(x-\alpha)^2+a^2(y-\beta)^2-a^2b^2=0 \quad \ldots \quad (1),$$

worin α und β die Koordinaten des Mittelpunktes und a und b die Halbachsen bedeuten. Für einen vierpunktig berührenden Kegelschnitt (I. Art) müssen dann die aus Gl. (1) berechneten Differentialquotienten y', y'' und y''' mit den entsprechenden Differentialquotienten von $y=f(x)$ übereinstimmen. Für den Punkt $C(x_0, y_0)$ ergibt sich so[1]):

$$\alpha=x_0-\frac{3\,y_0'\,y_0''}{3\,y_0''^2-y_0'\,y_0'''}, \qquad \beta=y_0+\frac{3\,y_0'\,y_0''}{y_0'''} \quad \ldots \quad (2\text{a, b}),$$

$$a^2=\frac{27\,y_0'\,y_0''^4}{y_0'''\,(3\,y_0''^2-y_0'\,y_0''')^2}, \qquad b^2=\frac{27\,y_0'^2\,y_0''^4}{y_0'''^2\,(3\,y_0''^2-y_0'\,y_0''')} \quad \ldots \quad (2\text{c, d}).$$

Ist für $C(x_0, y_0)$ außer $y_0'=0$ auch $y_0'''=0$, jedoch $y_0''\neq 0$, so gehen die Gl. (2b, c, d) von der unbestimmten Form 0/0 über in:

$$\alpha=x_0, \quad \beta=y_0+\frac{3\,y_0''^2}{y_0''''}, \quad a^2=\frac{3\,y_0''}{y_0''''}, \quad b^2=\frac{9\,y_0''^4}{y_0''''^2} \quad \ldots \quad (3\text{a, b, c, d}).$$

Ferner erhält man aus Gl. (2a, b, c, d) mit $k=3\,y_0'\,y_0''/y_0'''$ für

$$y=y_0+k-\sqrt{k^2-2\,k\,y_0'\,h-(k\,y_0''-y_0'^2)\,h^2} \quad \ldots \quad (4)$$

wenn $x=x_0+h$ gesetzt wird. Reihenentwicklung von (4) liefert Übereinstimmung bis zu den ersten vier Gliedern der Taylorschen Entwicklung. Auf den Sonderfall der Gl. (3a, b, c, d) soll hier nicht eingegangen werden.

Die vorgenannten Entwicklungen und die hier nicht wiedergegebenen Formeln für fünfpunktige Berührung gestatten die numerische und graphische Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie Abb. 1 für den Fall der Differentialgleichung $5\,x\,y'+5\,y-x^3=0$ erläutert. Für die spezielle Lösungskurve durch $C(x_0=4, y_0=4)$ berechnet man $y_0'=2{,}2$, $y_0''=1{,}3$, $y_0'''=0{,}225$, ferner $k=38{,}134$ und erhält für $h=1$, also $x=5$, gemäß Gl. (4) $y=6{,}8966$. Die genaue Lösung $20\,x\,y-x^4-64=0$ ergibt den Wert $y=6{,}89$. Gleichzeitig findet man für $h=-1$, also $x=3$, den Wert $y=2{,}4195$, genau $y=2{,}4167$. Die in Abb. 1 eingezeichnete Schmiegungsellipse II hat die Bestimmungsstücke $\alpha=2{,}1246$, $\beta=42{,}134$, $a=6{,}0019$, $b=40{,}1426$ und zeigt in der Nähe des Punktes C gute Anschmiegung an die genaue Lösungskurve I (zeichnerisches Verfahren!).

Bei der numerischen Auflösung von gewöhnlichen Gleichungen setzt man in Gl. (4) für $y=0$ und erhält zum Näherungswert x_0 die Korrektur h aus

$$(k\,y_0''-y_0'^2)\,h^2+2\,k\,y_0'\,h-(y_0^2+2\,k\,y_0)=0 \quad \ldots \quad (5).$$

[1]) Die rechten Seiten der Gl. (2a, b, c, d) lassen sich auch durch x_0, y_0, den Krümmungshalbmesser ϱ und den Krümmungshalbmesser ϱ_1 der Evolute ausdrücken, ferner ergeben sich Zusammenhänge mit der zweiten Beschleunigung [illegible]. Für den Fall einer Hyperbel erhält b^2/a^2 einen negativen Wert.

Für das einfache Beispiel $x^3 - 9 = 0$ findet man die Näherungswurzel $x_0 = 2$ und mit $y_0 = -1$, $y_0' = 12$, $y_0'' = 12$, $y_0''' = 6$, $k = 72$ gemäß Gl. (5) die Korrektur zu $h = 0{,}080082$, also $x = x_0 + h = 2{,}080082$, was mit dem genauen Wert bis auf fünf Dezimalstellen übereinstimmt. Man erhält demnach durch Auflösung einer Gleichung zweiten Grades in h einen „vierpunktigen" Näherungswert der Wurzel.

Eine von den zahlreichen getriebetechnischen Anwendungen zeigt Abb. 2 für den Entwurf eines „Stillstandgetriebes". Das vom Steg s geführte Planetenrad d rollt innerhalb des feststehenden Hohlrades c vom dreifachen Teilkreisdurchmesser. Der Teilkreispunkt C' von d beschreibt die Hypozykloide I mit den Spitzen C_1, C_2 und C_3. Aus den Gleichungen der Hypozykloide $x = r(\sin 2\varphi + 2\sin\varphi)$, $y = r(3 + \cos 2\varphi - 2\cos\varphi)$ folgt für

$$C(x_0 = 0, \quad y_0 = 2r), \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = -1:8r, \quad y_0''' = 0, \quad y_0'''' = -3:128r^3.$$

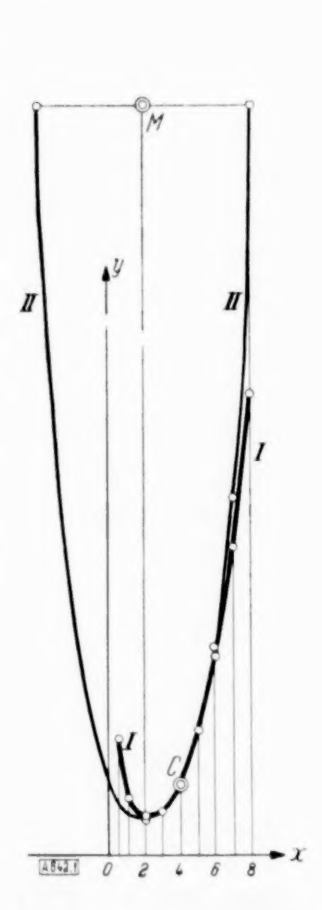


Abb. 1. Zeichnerische Lösung einer Differentialgleichung mittels Schmiegungsellipse 1. Art.

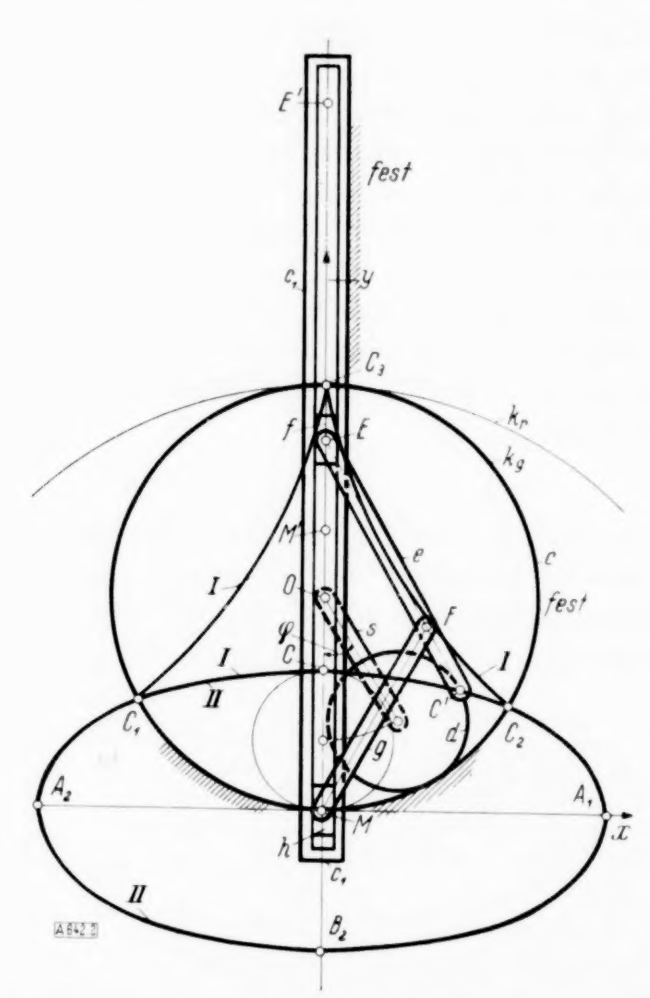


Abb. 2. Schmiegungsellipse für dreispitzige Hypozykloide. Vereinigung von gleichschenkliger Geradschubkurbel mit Umlaufrädertrieb zu einem Stillstandgetriebe.

Die Bestimmungsstücke der Schmiegungsellipse II sind $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $a = 4r$, $b = 2r$. In Abb. 2 wird die Schmiegungsellipse II durch die gleichschenklige Geradschubkurbel mit der Kurbel $g = \overline{MF} = 3r$, der Koppel $e = \overline{EF} = 3r$ und den Gleitsteinen f und h getrieblich erzeugt (h dabei zunächst fest gedacht). Durchläuft C den Hypozykloidenbogen $C_1 C_2$, so bleibt h in Ruhe. Gelangt jedoch C von C_2 nach C_3 und von dort zurück nach C_1, so gleitet die Zapfenmitte M von h längs der feststehenden Gleitbahn c_1 von M nach M' und zurück nach M. Der Gleitstein h bleibt also während des dritten Teils der Umlaufszeit des Steges s in Ruhe (Stillstand- oder Rastgetriebe). Über weitere Anwendungen soll a. a. O. berichtet werden[2].

Vor Herleitung der fünfpunktig berührenden Kegelschnitte (II. Art) legt man zweckmäßig den Koordinatenanfangspunkt durch den gegebenen Punkt C; die durch Differentiation aus der quadratischen Form entstandenen Gleichungen werden dann wesentlich einfacher. Auch der Fall $y' = 0$ und $y''' = 0$ kann so erledigt werden. Es sei hier noch auf zahlreiche geometrische Örter verwiesen, z. B. auf den Ort aller Punkte des bewegten Getriebegliedes, für die die Schmiegungsellipse in einen vier- oder fünfpunktig berührenden Krümmungskreis übergeht ($b^2/a^2 = 1$, Burmestersche Kreisungspunktkurve und Burmestersche Punkte), ferner auf den Ort der Mittelpunkte aller Schmiegungskegelschnitte I. oder II. Art usw. Schmiegungskegelschnitte können auch zum Entwurf von Rechengetrieben benutzt werden, insbesondere dann, wenn diese nur für ein begrenztes Intervall der veränderlichen Größen benötigt werden. 642

[2]) Reuleaux-Mitteilungen und Archiv für Getriebetechnik (RM-AfG).

Beiträge zur Statik elastischer Platten veränderlicher Dicke[1].

Von *R. Gran Olsson* in Trondheim.

1. Zur Theorie der Plattenknickung hat G. H. Bryan[2]) den ersten Beitrag geliefert, indem er den Fall einer allseitig gleichmäßig gedrückten, unnachgiebig und gelenkig gelagerten, rechteckigen Platte untersuchte. Eine in dieser Weise belastete und gestützte Platte wird hier bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit in der einen Richtung in bezug auf ihre Stabilität untersucht (Abb. 1). Die Differentialgleichung des Problems wird in üblicher Weise mit Hilfe eines Ansatzes für Δw (w = Durchbiegung, Δ = Laplacescher Operator), der den Grenzbedingungen an zwei gegenüberliegenden Rändern von selbst genügt, in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandelt. Die Lösung dieser Gleichung ist durch die konfluente hypergeometrische Funktion gegeben[3]). Die Knickbedingung läßt sich im Falle dieser allgemeinen Lösung für ein gegebenes Beispiel praktisch kaum ausrechnen, weshalb der Parameter im Zähler der konfluenten hypergeometrischen Funktion so gewählt wird, daß ein Polynom entsteht. Die Ergebnisse für die Polynome nullten, ersten und zweiten Grades werden mitgeteilt. Die kritische Knickbelastung wird mit der Knickbelastung verglichen, die man für eine Platte konstanter Dicke erhält, deren Biegesteifigkeit gleich der Biegesteifigkeit an der „Wurzel" der Platte veränderlicher Dicke ist. Für eine in der einen Richtung quadratisch veränderliche Biegesteifigkeit ist die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch Besselfunktionen gegeben.

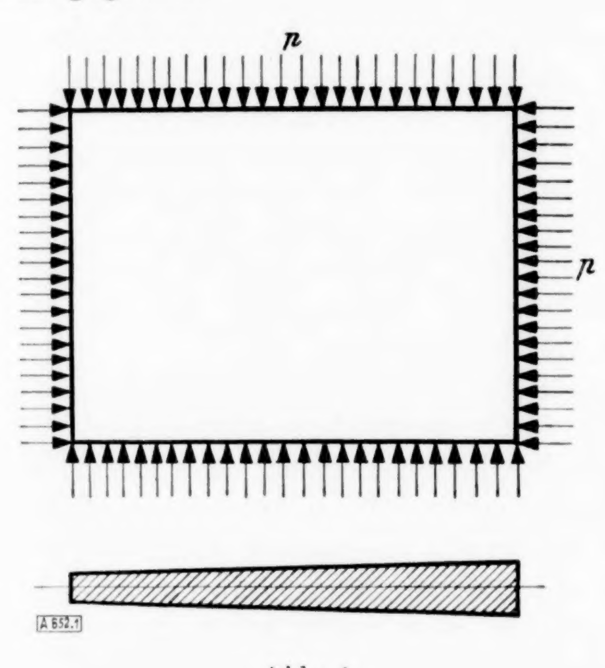


Abb. 1.

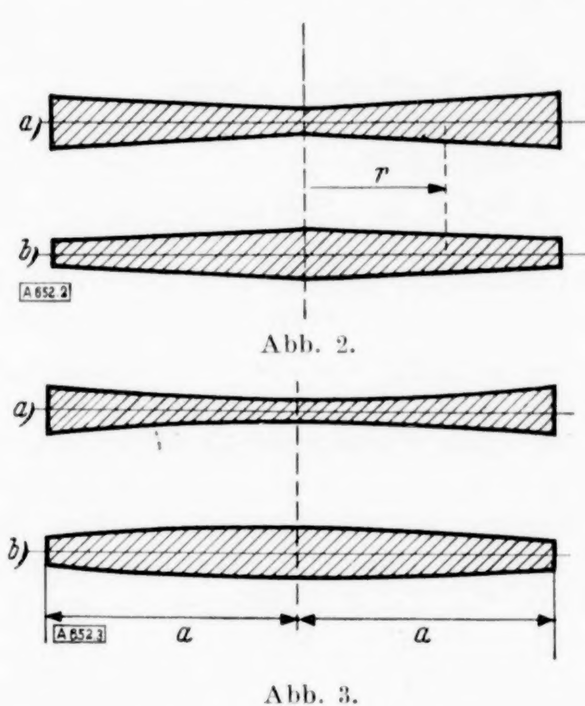


Abb. 3.

Abb. 1. Rechteckplatte mit in einer Richtung linear veränderlicher Biegesteifigkeit allseitig unter konstantem Druck in der Plattenebene (Randbedingungen: $w = 0$, $\Delta w = 0$).

Abb. 2. Kreisplatte, deren Biegesteifigkeit dem Gesetz folgt: $N = N_0\,(1 \pm r)^3$ (N_0 = Biegesteifigkeit im Mittelpunkt der Platte). Für a) gilt das Plus-, für b) das Minuszeichen.

Abb. 3. Kreisplatte, deren Biegesteifigkeit dem Gesetz folgt: $N = N_0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}\varrho^2}$. In a) ist $\lambda = -4$, in b) $\lambda = 4$.

2. Es wird die axialsymmetrische Biegung einer Kreisplatte von radial veränderlicher Dicke untersucht, wobei die Biegesteifigkeit N dem Gesetz folgt: $N = N_0(1 \pm r)^n$ (r = Entfernung eines beliebigen Punktes von der zur Mittelebene senkrechten Symmetrieachse, n beliebige positive Zahl). Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist für eine Querdehnungszahl $\nu = \frac{1}{n}$ durch die gewöhnliche hypergeometrische Funktion gegeben. Insbesondere ergeben sich für $n = 3$, $\nu = \frac{1}{3}$ elementare Funktionen als Lösungen. $n = 3$ entsprechen Plattenprofile nach Abb. 2. Das partikulare Integral zur Befriedigung der Störungsfunktion läßt sich in diesem Fall für beliebige axialsymmetrische Belastung in bekannter Weise nach der Methode der Variation der Konstanten ermitteln. Die Platten können mit oder ohne Bohrung, die Grenzbedingungen ganz beliebig sein.

3. Axialsymmetrische Biegung wie unter (2) mit $N = N_0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{n}\varrho^n}$ (λ und n sind beliebige Konstanten, $\varrho = \frac{r}{a}$, a = Außenradius der Platte). Durch entsprechende Wahl von λ und n

[1]) Nach gemeinsamen Arbeiten mit E. Reissner, Cambridge-Boston, Mass. (U.S.A.).
[2]) G. H. Bryan: Proc. Lond. math. Soc. 22 (1891), S. 54.
[3]) G. N. Watson and E. T. Whittaker: Modern Analysis 4. ed. S. 337, Cambridge 1927.

läßt sich eine große Mannigfaltigkeit von Plattenprofilen erzeugen, die praktisch vorkommen[4]. Für $n = 2$, $\lambda = \pm 4$ sind die Radialschnitte der Platte in Abb. 3 dargestellt. Bei beliebigen Werten von n ergibt sich als Lösung der homogenen Gleichung die konfluente hypergeometrische Funktion[5]). Für $n = 2\nu$ ist die Lösung auf Besselfunktionen imaginären Arguments zurückführbar. Das partikulare Integral, das die Störungsfunktion befriedigt, läßt sich in vielen Fällen sehr einfach durch Ausdrücke von der Form $\varrho^m e^{\frac{\lambda}{n}\varrho^n}$ angeben, insbesondere auch für den praktisch wichtigen Belastungsfall einer Einzellast in der Mitte sowie gleichmäßig verteilter Belastung sowohl bei der vollen Kreisplatte als auch bei der Ringplatte. Die durch ein Temperaturgefälle senkrecht zur Plattenebene hervorgerufenen Formänderungen und Spannungen lassen sich ebenfalls ermitteln.

Die hier berührten Aufgaben der Plattenstatik sollen später ausführlich dargestellt werden.

652

Strahlgebläse mit hohem Wirkungsgrad insbesondere zur Tunnellüftung.

Von *H. Henschke* in Berlin.

Strahlgebläse zur Tunnellüftung wurden erstmalig von dem italienischen Erfinder Saccardo beim 3000 m langen Partolinotunnel angewandt. Später wurden nach dem gleichen System belüftet u. a. der Gotthardtunnel, der Tauerntunnel und z. B. auch der längste deutsche Tunnel, der Kochemer Tunnel.

Diese Anlagen waren strömungstechnisch außerordentlich ungünstig ausgeführt, die Verluste dementsprechend hoch. Der Gesamtwirkungsgrad für einen längeren 2-gleisigen Tunnel lag etwa bei 6%. Stärkere Gegenwinde konnten überhaupt nicht überwunden werden.

Da die Lüftungsverhältnisse des Kochemer Tunnels eine grundlegende Verbesserung notwendig machten, wandte sich die Reichsbahndirektion Trier (jetzt Saarbrücken) an das Institut für Technische Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin mit der Bitte, zu prüfen, wie die bestehenden Mängel behoben werden könnten.

Prof. Föttinger schlug eine wesentliche Umgestaltung des Strömungssystems vor (Abb. 1). Am Tunnelportal sollen eine Zahl zylindrischer oder konischer Strahldüsen profilfrei angeordnet werden. In jede Düse wird ein Axial-Ventilator gesetzt, der durch einen Elektromotor angetrieben wird. Die Strahldüsen blasen in einen düsenförmig ausgebildeten Mischraum, in dem die Strahlgeschwindigkeit zum Teil in Druck umgesetzt wird. Gegenüber den alten Saccardo-Anlagen liegen die Vorzüge dieser Anordnung neben baulich einfacherer und billiger Ausführung vor allem darin, daß der Verlust vor dem eigentlichen Strahlgebläse nahezu beseitigt und die kinetische Energie hinter dem Gebläse voll ausgenutzt wird.

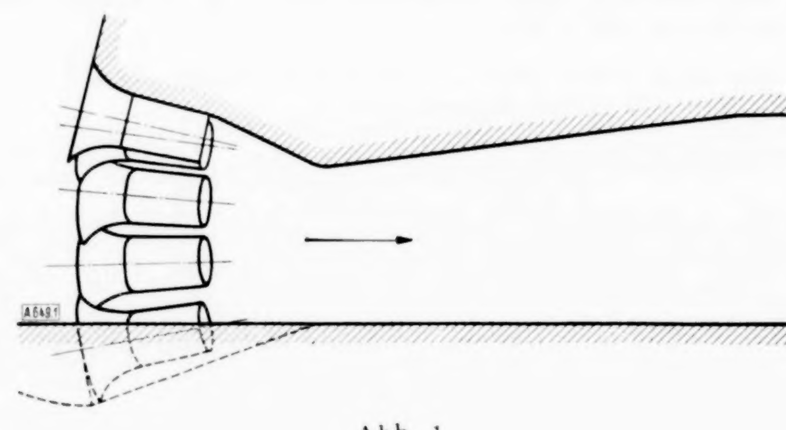


Abb. 1.

Um die Verluste im Strahlgebläse, das von der Mündung der Düsen abgerechnet wird, zu senken, wurden eingehende Versuche angestellt. Es war vor allem zu klären, ob es zweckmäßig ist, mit großen Mengen und kleinen Drucken oder kleinen Mengen und großen Drucken zu arbeiten. Diese Frage lief darauf hinaus, welche Querschnitte die Strahldüsenmündungen im Verhältnis zum Tunnelquerschnitt erhalten sollen. Weiter war zu untersuchen, unter welchem Winkel die Strahldüsen zur Tunnelachse stehen sollen, wie der Mischraum zu gestalten ist und wie die Strahldüsen am Tunnelumfang profilfrei anzuordnen sind.

[4]) Siehe auch O. Pichler: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Berlin 1928, S. 26, wo die volle Kreisplatte unter gleichmäßig verteilter Belastung bei derselben Veränderlichkeit der Biegesteifigkeit, allerdings bei Beschränkung auf $n = 2$, behandelt ist.

[5]) Bezüglich Tabellen der konfluenten hypergeometrischen Funktion siehe Report of the British Association for the Advancement of Science 1926, S. 276, 1927, S. 220.

Der Wirkungsgrad des Strahlapparates wird definiert zu

$$\eta = \frac{\text{Energie am Tunnelanfang nach Beendigung der Mischung}}{\text{Energie der Luftstrahlen beim Verlassen der Strahldüse}} .$$

Die Versuche ergaben, daß den größten Einfluß auf die Strahlapparatcharakteristik das Verhältnis des Gesamtquerschnittes der Strahldüsenmündungen zu dem engsten Querschnitt des Mischraumes hat. Es zeigte sich, daß es günstig ist, den Gesamtquerschnitt der Strahldüsen etwa gleich dem 0,3- bis 0,5-fachen des engsten Mischraumquerschnittes zu machen. Durch diese Feststellung erledigt sich die Frage: „Wenig große oder viele kleine Strahldüsen" von selbst, da der vorhandene Profilumfang nur bei Anwendung größerer Düsen gestattet, den erforderlichen Querschnitt unterzubringen. Nächst dem Querschnittsverhältnis ist die Gestaltung des Mischraumes von ausschlaggebender Bedeutung. Bei allen Strahlapparaten ist es zweckmäßig, den Mischraum hinter den Strahldüsen einzuschnüren. Eine Grenze wird dieser Einschnürung hier durch das lichte Profil gesetzt. Die Entfernung des engsten Mischraumquerschnittes von der Strahldüsenmündung darf nicht zu groß sein, sonst ist die Mischung schon vorher beendet und die günstige Wirkung der Einschnürung geht verloren. Liegt der engste Mischraumquerschnitt den Strahldüsenmündungen zu nahe, so wird die Verengung sehr schroff. Die Düsenstrahlen treffen dann auf die Wand des Mischraumes, wobei Stoßverluste auftreten. Sind die Düsenstrahlen dagegen sehr stark geneigt, dann wird die wirksame axiale Impulskomponente zu klein. Durch zweckmäßige Gestaltung des Mischraumes konnte der Wirkungsgrad auf etwa 45% gegenüber 23% bei zylindrischer Mischdüse gesteigert werden. Als günstigster Neigungswinkel der Strahldüsen hat sich ein Winkel von 10 bis 20° gegen die Tunnelachse ergeben. Die Anlage wird außerordentlich vereinfacht, wenn auf Anordnung von Strahldüsen zwischen den Gleisen verzichtet werden kann. Es ergab sich, daß dies mit nur sehr geringer Einbuße an Wirkungsgrad geschehen kann, wenn dafür eine entsprechende Zahl Düsen mehr seitlich und oberhalb des Gleiskörpers untergebracht werden.

Um zu prüfen, ob die Strahlapparatcharakteristik von der Reynoldsschen Zahl unabhängig ist, wurde der Druck variiert. In dem durch die Versuchsbedingungen gegebenen Bericht wurde Unabhängigkeit nachgewiesen.

Als Ergebnis dieser Untersuchungen kann eine wesentliche Verbesserung der Strahlgebläse-Tunnellüftung festgestellt werden, und zwar in der Größenordnung von etwa 10% des bisherigen reinen Strahlapparates auf 45% bei der neuen Anordnung. 649

Über Tragflügel mit kreisförmigem Grundriß[1].

Von *Wilhelm Kinner* in Göttingen.

Im folgenden soll dargelegt werden, wie sich die Prandtlsche Quellsenkenmethode der tragenden Fläche[2]) zur Untersuchung von Tragflügeln mit kreisförmigem Grundriß in stationärer Strömung verwenden läßt. Die Ansätze werden in üblicher Weise linearisiert; insbesondere verlegen wir die Sprungstellen des Beschleunigungspotentials Φ vom Flügel auf die Grundkreisfläche. Der Mittelpunkt des Grundrißkreises liege im Ursprung, seine Fläche in der x-y-Ebene; sein Radius sei c. Die dimensionslos gemachten kartesischen Koordinaten seien $\bar{x} = \frac{x}{c}$, $\bar{y} = \frac{y}{c}$, $\bar{z} = \frac{z}{c}$. Die x-Achse zeige nach hinten, die y-Achse nach rechts, die z-Achse nach oben. Die Anströmungsgeschwindigkeit in x-Richtung sei v. Die Flüssigkeit wird als volumbeständig, reibungs- und schwerelos vorausgesetzt.

Da die Berechnung des Potentials für vorgegebene Auftriebsverteilungen auf Integrationsschwierigkeiten stößt, schlagen wir den umgekehrten Weg ein, d. h. wir entnehmen die „Potentialfunktionen erster Art" (2) der Potentialtheorie, bestimmen die zugehörige Aerodynamik und suchen die kinematische Bedingung durch Linearkombination zu befriedigen. Wir verwenden dabei elliptische Koordinaten μ, η, φ, die mit den kartesischen durch die orthogonale Transformation

$$x = c\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\eta^2}\cos\varphi\,, \qquad y = c\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\eta^2}\sin\varphi\,, \qquad z = c\,\mu\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verknüpft sind. Die Zuordnung wird umkehrbar eindeutig, wenn man die Hyperboloidkoordinate μ beim Übergang vom oberen zum unteren Halbraum von positiven zu negativen

[1]) Auszug aus der Dissertation des Verfassers. – Die Untersuchung kreisförmiger Tragflügel ist für die Theorie des Autogiro von Bedeutung.

[2]) L. Prandtl: Dieses Heft S. 360. Der mündliche Vortrag des Verfassers schloß sich unmittelbar den Ausführungen Prandtls an.

Werten springen läßt. In elliptischen Koordinaten lauten die bekannten[3]), überall endlich bleibenden Lösungen von $\Delta \Phi = 0$ in reeller und normierter Form:

$$\Phi_n^m(\mu, \eta, \varphi) = \frac{1}{i^{n-m+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_n^m P_n^m(\mu)\, Q_n^m(i\eta) \cos m\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin C_n^m eine Konstante und P_n^m bzw. Q_n^m die zugeordneten Kugelfunktionen erster bzw. zweiter Art bedeuten. Von Interesse sind nur Funktionen Φ_n^m mit ungeradem $n+m$, da diejenigen mit geradem $n+m$ an der Grundkreisfläche stetig sind. Die Auftriebsdichte an einer Stelle (μ, φ) der Grundkreisfläche ist dem Potentialsprung proportional:

$$p_u - p_{ob} = \varrho\, (\Phi_{ob} - \Phi_u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Der Gesamtauftrieb $A = \iint (p_u - p_{ob})\, d\,F$ ist:

$$A_1^0 = \frac{4}{3} \pi \varrho c^2 C_1^0, \qquad A_n^m = 0 \text{ für alle übrigen } (n, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Das Moment um die y-Achse $M = \iint (p_u - p_{ob})\, x\, d\,F$ ist:

$$M_2^1 = \frac{4}{15} \pi \varrho c^3 C_2^1, \qquad M_n^m = 0 \text{ für alle übrigen } (n, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Der Abwind am Flügel folgt aus $w(x, y) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, d\,x$ durch Integration in der Grundrißebene parallel zur Anströmungsrichtung. Man erhält:

$$w_1^0(\mu, \varphi) = \frac{C_1^0}{v} \left[Q_1(\overline{y}) - \frac{\pi}{2} P_1^1(\mu) \cos\varphi \right], \qquad w_2^1(\mu, \varphi) = \frac{\pi}{4} \frac{C_2^1}{v} P_2(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6);$$

allgemein läßt sich $w_n^m(\mu, \varphi)$ durch tesserale Kugelfunktionen darstellen, wozu für ungerades n als Summand $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{C_n^m}{v} Q_n(\overline{y})$ hinzutritt; dadurch wird der Abwind für die betreffenden Funktionen an den Flügelenden logarithmisch unendlich.

Die Gestalt des Flügels bestimmt man aus $z(x, y) = \frac{1}{v} \int^{x} w\, d\,x$.

Der Widerstand W_n^m stimmt nach dem Munkschen Staffelungssatz mit dem der zugehörigen tragenden Linie überein. Für ungerades m verschwindet deren Auftriebsdichte $a(y) = \int_{-x_0}^{+x_0} (p_u - p_{ob})\, d\,x$ (mit $x_0 = \sqrt{c^2 - y^2}$) identisch; für gerades m erhält man:

$$a_{2\lambda+1}^{2\varkappa}(\overline{y}) = (-1)^{\lambda+1}\, 2\pi \varrho c\, C_{2\lambda+1}^{2\varkappa} \int_{-1}^{\overline{y}} P_{2\lambda+1}(\overline{y})\, d\,\overline{y}, \qquad w_{2\lambda+1}^{2\varkappa}(\overline{y}) = (-1)^{\lambda} \frac{C_{2\lambda+1}^{2\varkappa}}{v} Q_{2\lambda+1}(\overline{y}) \quad (7).$$

$$W_1^0 = \pi \frac{\varrho c^2 C_1^{0\,2}}{v^2}, \qquad W_3^0 = \frac{\pi}{6} \frac{\varrho c^2 C_3^{0\,2}}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Für die Funktionen Φ_n^m ist am Vorderrande keine Saugkraft vorhanden, da die induzierten Geschwindigkeiten (außer an den Flügelenden) endlich sind. Hieraus folgt, daß man mit diesen Funktionen allein den Einfluß einer Anstellwinkeländerung nicht untersuchen kann.

Die hierzu nötigen „Potentialfunktionen zweiter Art“ Φ_n erzeugen wir aus den Φ_{n+1}^n $(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$ durch den Grenzprozeß

$$\Phi_n(\mu, \eta, \varphi) = \lim_{\Delta c \to 0} \frac{\left[1 + (n+1) \frac{\Delta c}{c}\right] \Phi_{n+1}^n(\mu + \Delta\mu, \eta + \Delta\eta, \varphi) - \Phi_{n+1}^n(\mu, \eta, \varphi)}{\Delta c} \quad . \quad (9),$$

woraus

$$\Phi_n = C_n \frac{\mu (1 - \mu^2)^{n/2}}{(\mu^2 + \eta^2)(1 + \eta^2)^{n/2}} \cos n\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

[3]) M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebn. der Math. u. ihrer Grenzgeb., Bd. 1, 1932, S. 59.

Die Φ_n werden am Rande des Grundrißkreises unendlich; sie haben für sich keine physikalische Bedeutung, da die Abflußbedingung am Hinterrande (Auftriebsdichte gegen Null) nicht erfüllt ist.

Der Auftrieb ist

$$A_0 = 4\,\pi\,\varrho\,c^2\,C_0\,, \qquad A_n = 0 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (11)$$

und das Moment um die y-Achse:

$$M_1 = \frac{4}{3}\,\pi\,\varrho\,c^3\,C_1\,, \qquad M_n = 0 \text{ für } n = 0, 2, 3, \ldots \qquad (12).$$

Zur Berechnung des Abwindes am Flügel integriert man auf einer außerhalb der Grundrißebene liegenden Parallelen zur x-Achse und läßt nach Ausführung der Integration den Aufpunkt auf die Grundkreisfläche rücken. Der Abwind wird innerhalb des Grundkreises unabhängig von $\bar{x}$:

$$w_{2\varkappa}(\bar{y}) = (-1)^{\varkappa+1}\,\frac{C_{2\varkappa}}{v}\,\frac{d\,Q_{2\varkappa}(\bar{y})}{d\,\bar{y}}\,, \qquad w_{2\lambda+1}(\bar{y}) = (-1)^{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{C_{2\lambda+1}}{v}\,\frac{d\,P_{2\lambda+1}(\bar{y})}{d\,\bar{y}} \qquad (13);$$

daher sind die tragenden Flächen Regelflächen.

Der Widerstand verschwindet für ungerades n und wird für gerades n unendlich; für ein Bogenstück des Vorderrandes wird für gerades n auch die Saugkraft unendlich, wenn man die Integration bis an die Flügelenden erstreckt.

Für die zugehörigen tragenden Linien hat man:

$$a_{2\varkappa}(\bar{y}) = (-1)^{\varkappa}\,2\,\pi\,\varrho\,c\,C_{2\varkappa}\,P_{2\varkappa}(\bar{y})\,, \qquad a_{2\lambda+1}(\bar{y}) = 0 \qquad (14),$$

$$w_{2\varkappa}(\bar{y}) = (-1)^{\varkappa+1}\,\frac{C_{2\varkappa}}{v}\,\frac{d\,Q_{2\varkappa}(\bar{y})}{d\,\bar{y}}\,, \qquad w_{2\lambda+1}(\bar{y}) = 0 \qquad (15).$$

Mit den entwickelten mathematischen Hilfsmitteln löst man die zweite Grundaufgabe in folgender Weise. Aus der gegebenen Flügelform $z(\bar{x}, \bar{y})$ berechnet man den Abwind $w(\bar{x}, \bar{y}) = v\,\frac{\partial\,z(\bar{x}, \bar{y})}{\partial\,\bar{x}}$ und sondert aus dem erhaltenen Ausdruck zunächst die darin auftretenden Abwindfunktionen erster Art ab. Der Rest ist eine Funktion $w(\bar{y})$ von $\bar{y}$ allein; man entwickelt ihn nach Abwindfunktionen zweiter Art derart, daß die Abflußbedingung am Hinterrande erfüllt ist. Die Potentialkoeffizienten $C_{2\varkappa}$ bestimmen sich aus einem unendlichen linearen Gleichungssystem, aus ihnen folgen die $C_{2\lambda+1}$ mittels der Abflußbedingung.

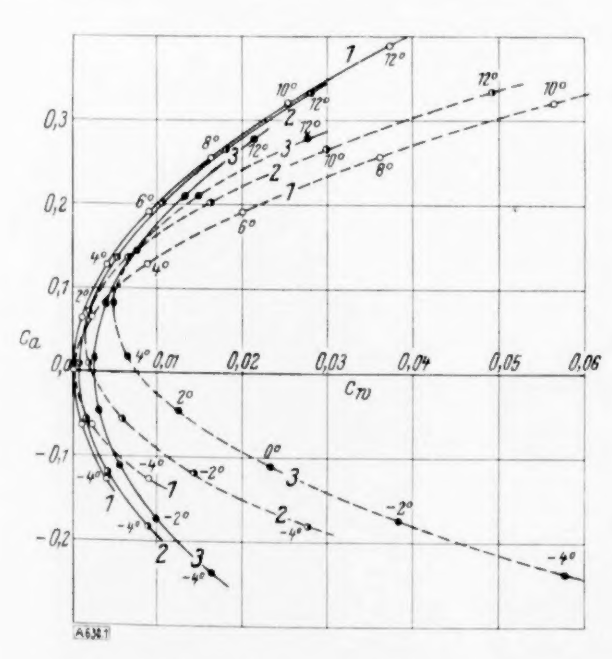


Abb. 1. Theoretische Widerstandspolaren.

1. Ebene Kreisscheibe;
2. druckpunktfeste Fläche $\Phi_1^0 + \Phi_3^0 + \Phi_2^1$ mit $C_1^0 = C_3^0$, $C_2^1 = -2{,}58\,C_1^0$ und $\frac{C_1^0}{v^2} = 0{,}025$;
3. wie 2. mit $\frac{C_1^0}{v^2} = 0{,}050$.

Ausgezogene Kurven: Linienwiderstände;
gestrichelte Kurven: Flächenwiderstände.

Die Auftriebsverteilung, der Gesamtauftrieb und das Kippmoment sind damit bekannt. Den Einfluß einer Anstellwinkeländerung kann man durch lineare Überlagerung einer ebenen Kreisscheibe untersuchen. Der „Flächenwiderstand“ $W_F = -\frac{1}{v}\iint (p_u - p_{ob})\,w(x, y)\,d\,F$ ist um den Betrag der Saugkraft größer als der wahre Widerstand. Letzterer ist mit dem „Linienwiderstand“ $W_L = -\frac{1}{v}\int\limits_{-c}^{+c} a_L(y)\,w_L(y)\,d\,y$ identisch, da durch Verschiebung der Auftriebselemente das abgehende Wirbelband und daher auch die in diesem steckende kinetische

Energie, das Äquivalent der Widerstandsarbeit, nicht geändert wird. Ihrer analytischen Form nach ergeben sich der Auftrieb und sein Moment als Linearformen, die beiden Widerstände und die Saugkraft als quadratische Formen der beiden Parameter $\frac{H}{c}$ (Wölbungsparameter) und $\operatorname{tg} \alpha$.

Nach dem dargestellten Verfahren wurde die ebene Kreisscheibe, die Kugelkalotte, ein druckpunktfester Flügel mit S-schlag (vgl. die Abbildung) und das Rollmoment einer Verwindung berechnet, letzteres mit den entsprechenden antisymmetrischen Potentialfunktionen (trigonometrischer Faktor $\sin \varphi$).

Versuche zur Nachprüfung der Theorie sind an der Göttinger Aerodynamischen Versuchsanstalt in Vorbereitung. Eine theoretische Untersuchung des elliptisch berandeten Flügels in stationärer Strömung mit Verwendung von Laméschen Funktionen ist im Gange. 630

Ueber ein instabiles Gebiet bei Wirbelringen.

Von *Carl-Heinz Krutzsch* in Dresden.

Durch die Anwendung einer besonderen Färbung bei Wirbelringen in Flüssigkeiten kann man das Verhalten der Wirbelringe bei ihrer translatorischen Bewegung genauer beobachten, als bei vollkommen gleichmäßig gefärbten Ringen.

Die Färbung besteht darin, daß an der Rohrwandung unmittelbar an der Ausstoßöffnung eines Rohres leichtlöslicher Farbstoff aufgestrichen wird. Bei dem Vorbeiströmen von Flüssigkeit an dem gefärbten Rohrende wird ein Farbfaden erzeugt, der sich als Spirale in den entstehenden Ring einwickelt. (Siehe Abb. 1.)

Da die Geschwindigkeiten der Schichten im Wirbelring verschieden groß sind, zieht sich der Farbfaden weiter auseinander, die Spirale jedoch enger zusammen, wenn der Wirbelring sich weiterbewegt. (Siehe Abb. 2.) Besonders klar tritt bei dieser Art der Färbung die Wirbelringachse oder -seele hervor.

Bei der translatorischen Bewegung der Ringe ist folgendes Verhalten der Wirbelringseele zu beobachten. Im Anfang der Bewegung behält der Wirbelring seine vollkommene Regelmäßigkeit bei. Nach einiger Laufzeit erhält die Wirbelringseele aus kleinen Anfängen heraus regelmäßige, ganzzahlig auf dem gesamten Umfang verteilte Kröpfungen, die nach außen und hinten umgebogen sind. (Siehe Bild 3, 4, 5.) (Ein weiteres Bild eines Wirbelringes mit acht Kröpfungen befindet sich in der „Physikalischen Zeitschrift" 1936, Heft 16, S. 598.) Die Kröpfungen wachsen an, bis der Ring in eine vollkommen unregelmäßige Wirbelung übergeht und die Schichtung aufgelöst wird. Es bildet sich nach dieser Instabilität meist wieder ein regelmäßiger Wirbelring, der einen größeren Durchmesser besitzt.

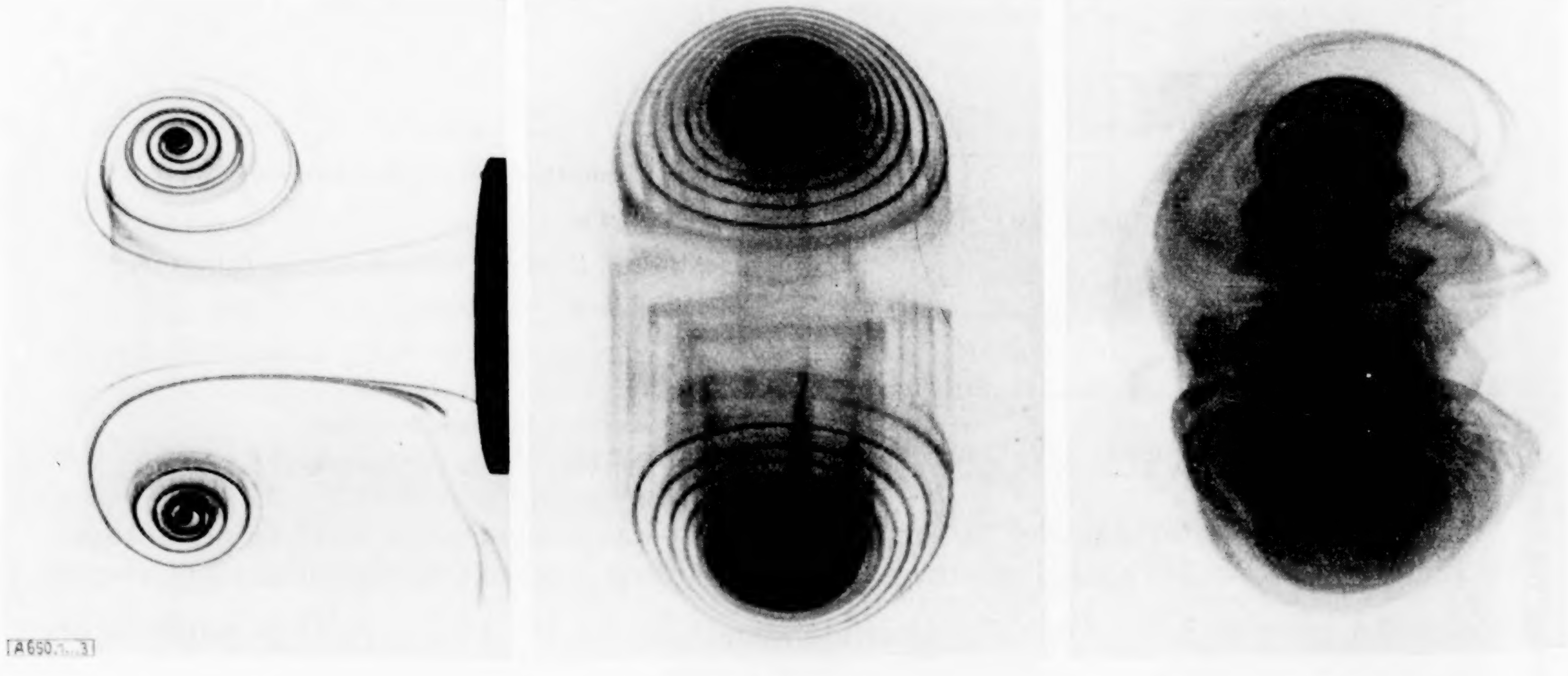


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Abb. 1. Ein nur oben und unten gefärber Wirbelring bei der Entstehung.

Abb. 2. Wirbelring nach einiger Laufzeit.

Abb. 3. Die Kröpfungen der von der Seite gesehenen Wirbelringseele. Die Bewegungsrichtung des Ringes geht von rechts nach links.

Bei sehr langsamen Wirbelringen sind keine Kröpfungen und keine Instabilität zu bemerken. Zwischen diesen beiden Bewegungsarten ist noch folgende Übergangserscheinung zu beobachten. Die Wirbelringseele kann Kröpfungen bekommen, ohne daß eine Instabilität eintritt. Der Vorgang spielt sich dann so ab, daß die Zahl der Wirbelringkröpfungen kleiner wird, bis wieder der normale Wirbelring entstanden ist.



Abb. 4. Die Kröpfungen eines von hinten aufgenommenen Wirbelringes.

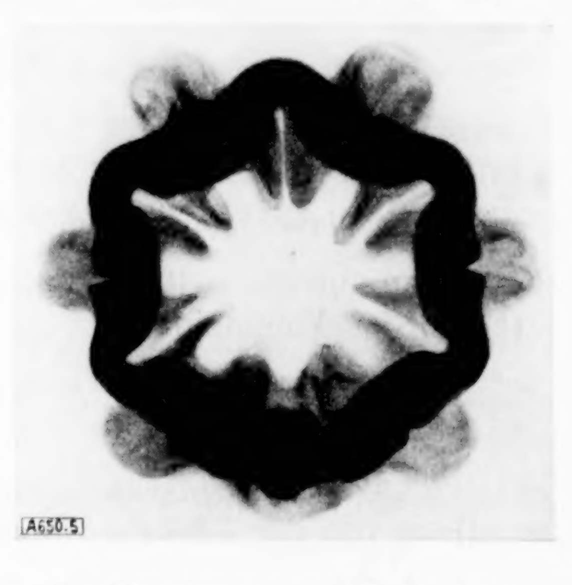


Abb. 5. Die Kröpfungen eines von hinten gesehenen Wirbelringes, der die siebente Kröpfung verliert und zum regelmäßigen Sechseck übergeht. (Kurz vor dem instabilen Gebiet.)

Die Zahl der Kröpfungen ist je nach der Anfangsgeschwindigkeit verschieden. Bei größeren Geschwindigkeiten entstehen mehr Kröpfungen. Es sind Kröpfungszahlen von vier bis zwölf beobachtet worden. Aus den Beobachtungen kann man entnehmen, daß noch weit höhere Kröpfungszahlen möglich sind, nur sind dabei die Kröpfungen nicht mehr so stark ausgeprägt und die Zeit zwischen der Entstehung der Kröpfungen und der Instabilität ist sehr kurz.

Über die Abhängigkeiten des instabilen Gebietes und der Kröpfungen, über die Erweiterung des neuen Wirbelringes nach der Instabilität und über die Geschwindigkeitsverteilung im Wirbelring sind Untersuchungen im Gange.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. R. Tomaschek für die Übertragung dieser Arbeit und für die Mitarbeit und Unterstützung, die mir von seiner Seite zuteil geworden ist, meinen herzlichen Dank abstatten. 650

Ueber Träger mit Eigengewicht und gleichem Widerstand gegen Biegung*).

Von *K. Ludwig* in Hannover.

Berechnet werden der aufliegende Träger und der Freiträger mit Einzellast am freien Ende, wenn die Querschnitte Rechtecke mit konstanter Breite sind. Die größten absoluten Biegungsmomente werden durch elliptische Integrale zweiter Gattung ausgedrückt, die abteilungsweise durch binomische Entwicklung und wiederholte Produktintegration ausgewertet werden. Das Gesamtgewicht kann dann durch elementare Integration berechnet werden.

657

Die über die Ausbeulgrenze belastete Platte.

Energieansatz und Differentialgleichungen.

Von *K. Marguerre* in Berlin-Adlershof.

Eine ausführliche Durchrechnung des Problems erscheint an anderer Stelle dieser Zeitschrift[1]). Es mag aber nicht uninteressant sein, einige Bemerkungen über den Zusammenhang der von uns angewandten Methode mit einer sonst gelegentlich benutzten hier anzufügen.

*) Eine ausführliche Veröffentlichung ist geplant.

[1]) K. Marguerre und E. Trefftz: Über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast.

Die Theorie der Platten mit „großen" Durchbiegungen unterscheidet sich von der gewöhnlichen Plattentheorie dadurch, daß die bei der Biegung entstehenden Dehnungsspannungen nicht mehr klein sind gegen die Biegungsspannungen selbst. Analytisch drückt sich darin aus, daß im „Dehnungsanteil" der Änderungen der Koeffizienten des Linienelementes[2]) das Quadrat der Durchsenkung w der Platte nicht mehr vernachlässigt werden kann gegen die linearen Glieder. Man findet unter der Voraussetzung, daß die übrigen Hypothesen der Plattentheorie (Ebenbleiben der Querschnitte usw.) gültig bleiben:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11} &= 2\,u_x + w_x{}^2 - 2\,z\,w_{xx} \equiv \bar{\gamma}_{11} - 2\,z\,w_{xx}, \\ \gamma_{22} &= 2\,v_y + w_y{}^2 - 2\,z\,w_{yy} \equiv \bar{\gamma}_{22} - 2\,z\,w_{yy}, \\ \gamma_{12} &= u_y + v_x + w_x\,w_y - 2\,z\,w_{xy} \equiv \bar{\gamma}_{12} - 2\,z\,w_{xy} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1,1);$$

u, v, w sind die Verschiebungen der Plattenmittelfläche.

Macht man nun die weitere Annahme, daß der übliche Ausdruck[3]) für die Formänderungsenergie (F. E.) der Volumeinheit:

$$a_3 = \frac{G}{4}\left[\frac{m}{m-1}(\gamma_{11}+\gamma_{22})^2 - 2\,(\gamma_{11}\,\gamma_{22} - \gamma_{12}{}^2)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1,2)$$

seine Gültigkeit behalten soll, so ergibt sich für ein Feld B eines an den Rändern gelagerten Plattenstreifens von der Dicke h durch Integration die gesamte F. E. in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \text{F. E.} &= \iint\limits_B \left(\int\limits_{h/2}^{h/2} a_3\,dz\right) dx\,dy \\ &= \frac{N}{2}\iint\limits_B (\Delta w)^2\,dx\,dy + \frac{G\,h}{4}\iint\limits_B \left[\frac{m}{m-1}(\bar{\gamma}_{11}+\bar{\gamma}_{22})^2 - 2\,(\bar{\gamma}_{11}\,\bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{12}{}^2)\right] dx\,dy \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1,3).$$

Darin ist $N = \dfrac{E\,m^2\,h^3}{12\,(m^2-1)} = \dfrac{E'\,h^3}{12}$ der sog. Plattenfaktor.

In der genannten Arbeit[4]) benutzen die Verfasser den Ausdruck (1,3) unmittelbar, um mit Hilfe eines Ritzschen Näherungsansatzes für die Funktion $w\,(x, y)$ die Verschiebungen u, v, sowie die in w enthaltenen Freiwerte auf Grund der üblichen Minimalforderungen des Prinzips der virtuellen Verrückungen zu bestimmen.

Man kann aber auch auf dem Umweg über die zu diesem Variationsproblem gehörigen Differentialgleichungen zu einem Lösungsansatz gelangen. Führt man die Dehnungsspannungen $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}$ ein, so erhält man für die sechs Unbekannten $\bar{\sigma}_x \ldots w$ das folgende System von sechs Gleichungen[5]):

1. Das erweiterte Hookesche Gesetz:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E'}{2}\left(\bar{\gamma}_{11} + \frac{1}{m}\,\bar{\gamma}_{22}\right), \qquad \bar{\sigma}_y = \frac{E'}{2}\left(\bar{\gamma}_{22} + \frac{1}{m}\,\bar{\gamma}_{11}\right), \qquad \bar{\tau} = G \cdot \bar{\gamma}_{12} \quad . \; . \; . \; . \quad (2,1),$$

2. Die Gleichgewichtsbedingungen für $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2,2),$$

3. Die Plattengleichung:

$$\Delta\,\Delta\,w - \frac{h}{N}\,(\bar{\sigma}_x\,w_{xx} + \bar{\sigma}_y\,w_{yy} + 2\,\bar{\tau}\,w_{xy}) = \frac{q}{N}\;(q = \text{Querlast}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2,3).$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich durch den aus der ebenen Elastizitätstheorie bekannten Spannungsfunktionsansatz auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten reduzieren. Setzt man nämlich[6])

$$\bar{\sigma}_x = \Phi_{yy}, \qquad \bar{\sigma}_y = \Phi_{xx}, \qquad \bar{\tau} = -\,\Phi_{xy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3,1),$$

---

[2]) Vgl. Handbuch der Physik VI, S. 56 f. (1928).

[3]) Eine eingehende Begründung in E. Trefftz: Über die Abteilung der Stabilitätskriterien . . . Verh. des III. intern. Kongresses für techn. Mech., Stockholm 1930, Bd. III, S. 44.

[4]) Siehe Fußnote 1), S. 353.

[5]) Eine elementare Herleitung, z. B. bei Prescott: Applied Elasticity, Chapter XV (London 1924).

[6]) Prescott, a. a. O., S. 442. Der Gedanke geht wohl auf v. Kármán zurück.

so wird das System (2,2) identisch befriedigt; aus (2,1) folgt bei Elimination der Verschiebungen u, v:

$$\Delta\Delta\Phi = (w_{xy})^2 - w_{xx}\,w_{yy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3,2)$$

und (2,3) nimmt die Form an:

$$N\,\Delta\Delta w - h\,(\Phi_{yy}\,w_{xx} + \Phi_{xx}\,w_{yy} - 2\,\Phi_{xy}\,w_{xy}) = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3,3).$$

(3,2) und (3,3) sind zwei simultane nicht lineare Differentialgleichungen für Φ und w.

Macht man nun, um Näherungslösungen für diese Gleichungen zu finden, für die Durchsenkung w eine „wahrscheinliche“, einen Freiwert enthaltende Annahme (durch die den geometrischen Randbedingungen genügt wird), so kann man Φ aus (3,2) errechnen, und (3,3) dann in der Form

$$\iint\limits_B N\,w\,\Delta\Delta w\,dx\,dy - h\iint\limits_B w\,(\Phi_{yy}\,w_{xx} + \Phi_{xx}\,w_{yy} - 2\,\Phi_{xy}\,w_{xy})\,dx\,dy = \iint w\,q\,dx\,dy \quad . \quad (4,1)$$

benutzen, um den Freiwert zu bestimmen.

Dieses Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeit erweitern[7]) auf einen mehrparametrigen Ansatz:

$$w = \Sigma\,a_i\,w_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,2).$$

Man erhält die notwendigen n-Gleichungen für die n-Parameter a_i in der Form:

$$\iint\limits_B N\,w_i\,\Delta\Delta w\,dx\,dy + h\iint\limits_B w_i\,(\Phi_{yy}\,w_{xx} + \Phi_{xx}\,w_{yy} - 2\,\Phi_{xy}\,w_{xy})\,dx\,dy = \iint w_i\,q\,dx\,dy \quad . \quad (4,3).$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Sind als Randbedingungen Spannungen $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ vorgeschrieben, so ist dieser Weg einfacher als der zuerst genannte, weil sich dann Φ bestimmen läßt, ohne daß die Verschiebungen u, v explizit in die Rechnung eingehen. — Ein Nachteil dieser Methode liegt darin, daß Gl. (4,1), obwohl man ihr durch partielle Integration die Form eines Energieausdruckes geben kann, keine unmittelbar ersichtliche mechanische Bedeutung zukommt[8]). Gl. (1,3) dagegen (bzw. die Forderung F. E. = Min.) besitzt einen anschaulichen mechanischen Sinn; das aber hat den Vorteil, das man leicht erkennen kann, welche Anteile der F. E. als offenbar unwesentlich unterdrückt werden dürfen[9]), wenn es sich darum handelt, ohne zu großem Rechenaufwand zu einer ersten Näherung zu kommen. — Über die Art und Weise, wie eine solche für die praktische Durchrechnung komplizierterer Fälle nicht unwichtige Vereinfachung sich auswirkt, wird bei Gelegenheit ausführlicher berichtet werden. 643

Die Bildung von Tropfen an Düsen und die Auflösung flüssiger Strahlen.

Von *Wolfgang v. Ohnesorge* in Berlin.

Die mannigfaltigen Erscheinungsformen von der Tropfenbildung bis zum Zerfall flüssiger Strahlen, die teils unter Gewichts-, teils unter Druckwirkung in die Atmosphäre austreten, sind mit Hilfe eines kinematographischen Hochfrequenzgerätes aufgenommen worden. Hinsichtlich der Geschwindigkeit der Tropfenfolge werden vier Fälle unterschieden:

0) Langsames Abtropfen von der Düse unter Gewichtswirkung ohne Strahlbildung,

I) Auflösung eines zylindrischen Strahls durch Vermittlung achsensymmetrischer Oberflächenschwingungen (nach Rayleigh),

II) Auflösung durch Vermittlung schraubensymmetrischer Schwingungen der Strahlmasse („Zerwellen“ nach Weber-Hänlein),

III) Zerstäubung des Strahls.

[7]) Der Verfasser verdankt Herrn Prof. Grammel den Hinweis, daß diese Methode allgemein erstmals (1904) von Galerkin angegeben wurde. In sehr vielen Fällen ist sie für die praktische Anwendung der (theoretisch ganz gleichwertigen) Ritzschen Methode überlegen.

[8]) Es hängt dies damit zusammen, daß oberhalb der Beulgrenze die potentielle Energie der gekrümmten Gleichgewichtslage kleiner ist als die der gestreckten; daß also nicht, wie am kritischen Punkte selbst, der Übergang von der einen in die andere durch rein-innere Umlagerung von Dehnungs- und Biegungsenergie vor sich geht.

[9]) Z. B. die Anteile, die von den Schubspannungen oder von der Querkontraktion herrühren oder dergleichen.

Über die Größenordnung der dabei beteiligten Kräfte gibt die beistehende Tabelle Auskunft, in der die Kapillarkräfte als Einheit genommen sind:

Vorgang	Trägheitskräfte	Gewichtskräfte	Kapillarkräfte	Direkte Wirkung der Zähigkeitsreibung	Indirekte Wirkung der Zähigkeitsreibung
Fall 0	$\to 0$	wesentlich	1	$\to 0$	0
Fall I	mäßig	sehr gering	1	sehr gering	$\to 0$
Fall II	steigend	~ 0	1	wesentlich	mäßig
Fall III	sehr stark	$\to 0$	1	stark	wesentlich

Mit steigender Geschwindigkeit der Tropfenbildung gewinnen sowohl die Trägheits- als auch die Reibungskräfte an Einfluß, während die Schwerewirkung zurücktritt. Mit indirekter Wirkung der Zähigkeitsreibung sind Wirbelablösungen durch innere Reibung gemeint.

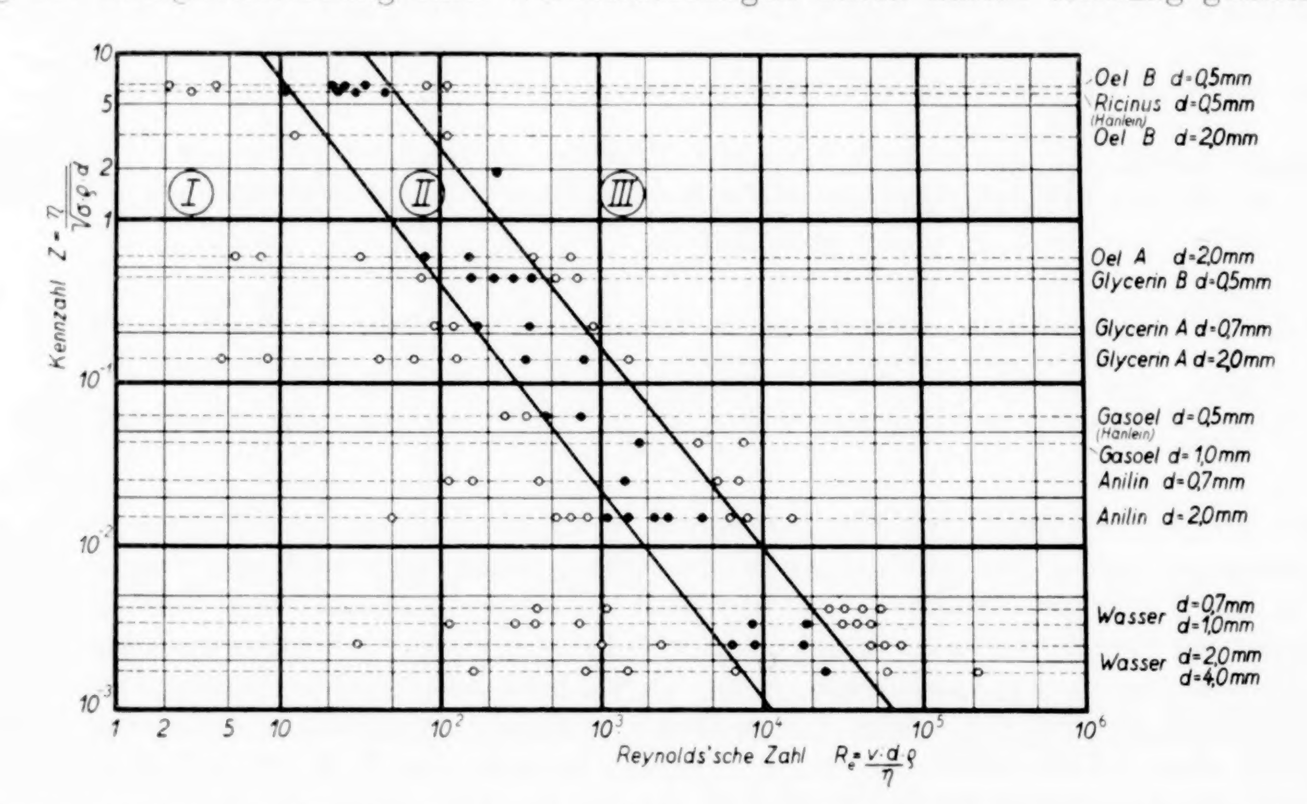


Abb. 1. Darstellung der Versuchsergebnisse im Schaubild $Z = Z(R_e)$. Die Strahlauflösung vollzieht sich in einer der drei charakteristischen Formen innerhalb der Bereiche I, II oder III.

Die theoretische Klärung der langsamen Tropfenbildung und der Strahlauflösung durch Vermittlung achsensymmetrischer Schwingungen geht auf Rayleigh zurück, der die Annahme reibungsfreier Flüssigkeit und Potentialströmung zugrunde legt, also allein Schwere und Kapillarität berücksichtigt. Eine Verfeinerung der Theorie durch Berücksichtigung der Zähigkeit verdanken wir C. Weber[1]). Die rechnerische Behandlung der dynamischen Vorgänge bereitet unüberwindliche Schwierigkeiten. Für die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Navier-Stokes für zähe Flüssigkeiten existieren bis heute keine strengen Lösungen, sobald Trägheit und Zähigkeit in ungefähr gleicher Größenordnung zusammenwirken. In solchen Fällen liefern die Gesetze der mechanischen Ähnlichkeit zuverlässige Aufschlüsse, insbesondere für die Auswertung und Verarbeitung der notwendigen Versuche.

Für den statischen Fall 0 ist die dimensionslose Kennziffer r/a maßgeblich, wobei r der Halbmesser der Düsenbohrung und a die sich aus den Stoffbeiwerten σ und Dichte ϱ berechnende „Laplacesche Konstante" bedeuten: $a = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho\, g}}$. Die statische Meridiankurve des achsensymmetrischen Tropfens kann auf dem Wege der numerischen Integration berechnet und damit das Gewicht des fallenden Tropfens mit großer Näherung innerhalb des praktisch wichtigen Bereiches $0{,}01 < r/a < 1{,}0$ ermittelt werden.

Im Falle der Strahlauflösung und Zerstäubung kommt das Webersche Ähnlichkeitsgesetz der Kapillarität und das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz der Zähigkeitsreibung in Betracht, während das Froudesche Gesetz bedeutungslos ist. Bei verschiedener Dichte des umgebenden Mediums muß das Reynoldssche Gesetz auch für das Außenmedium erfüllt werden. Die Verwirklichung des Weberschen und Reynoldsschen Gesetzes zugleich gelingt in unserem Falle, weil einerseits die beiden Kennzahlen ähnlichen Bau hinsichtlich der

[1]) ZAMM 11 (1931), S. 136.

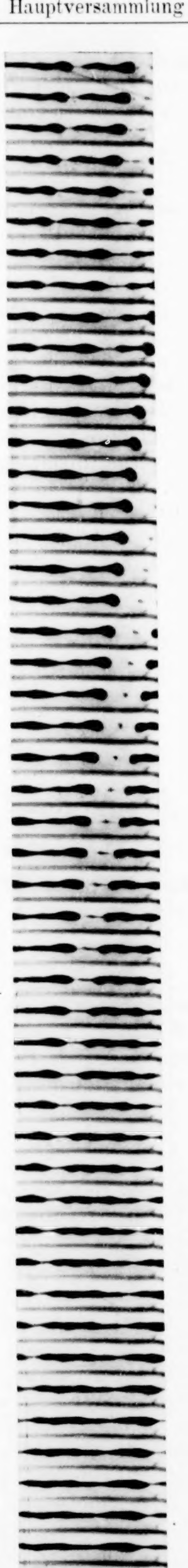


Abb. 2.

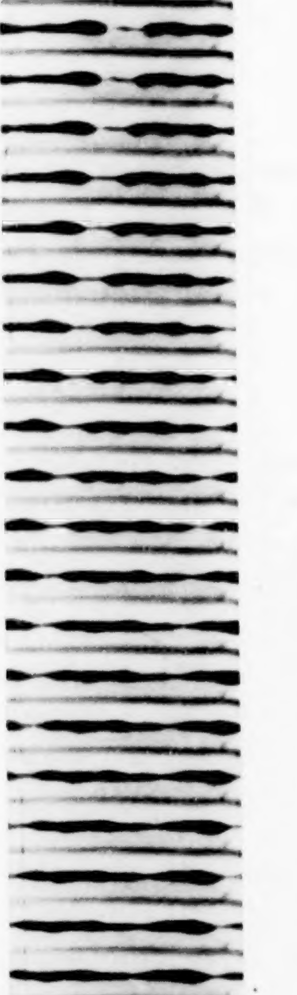


Abb. 3.

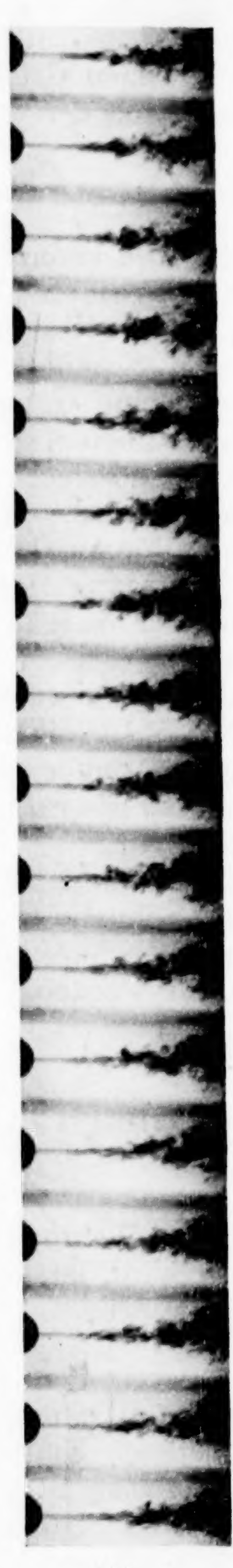


Abb. 4.

Abb. 2. Auflösung des zylindrischen Strahls durch Vermittlung achsensymmetrischer Schwingungen (Wasser). $R_e = 1000$. Bildfrequenz: 650 sec^{-1}.

Abb. 3. Strahlauflösung durch Vermittlung schraubensymmetrischer Schwingungen (Wasser). $R_e = 9800$. Bildfrequenz: 1600 sec^{-1}.

Abb. 4. Einsetzen der Strahlzerstäubung (Anilin). $R_e = 6200$. Bildfrequenz: 4200 sec^{-1}.

Potenzgesetze aufweisen, andererseits die Kapillarität der Flüssigkeiten nur in verhältnismäßig engen Grenzen variiert. Für das Zusammenwirken beider Gesetze bilden wir durch Elimination der Geschwindigkeit eine neue dimensionslose Kennzahl

$$Z = \frac{\eta}{\sqrt{\sigma \varrho d}},$$

in der alle kennzeichnenden Stoffbeiwerte: Oberflächenspannung σ, Dichte ϱ, absolute Zähigkeit η, sowie der Durchmesser d der Düsenbohrung enthalten sind, und die wir als Funktion der Reynoldsschen Kennzahl R_e zur Darstellung der Versuchsergebnisse benutzen (Abb. 1). In dem Schaubild $Z = Z(R_e)$ entspricht jeder Flüssigkeit bei festgehaltenem Düsendurchmesser eine Gerade parallel zur Abszissenachse. Der durch die Reynoldssche Zahl gekennzeichneten Art des Strahlzerfalls ist dann ein bestimmter Punkt auf der Geraden $Z =$ konst. zugeordnet. Die Versuche zeigen, daß die Gebiete der Vorgänge I, II und III durch gerade Linien, welche Potenzgesetze bedeuten, getrennt sind. Gebiet I liegt im Bereich kleiner Reynoldsscher Zahlen, insbesondere bei Flüssigkeiten mit großer innerer Reibung.

Vorgang II vollzieht sich nach Überschreiten eines kritischen Gebietes für alle untersuchten Flüssigkeiten innerhalb eines verhältnismäßig engbegrenzten Bereiches. Der Zerstäubungsvorgang III setzt plötzlich ein. Der Strahl zeigt in unmittelbarer Nähe der Mündung eine glatte Oberfläche mit achsensymmetrischen Anschwellungen, die in schraubenförmige Querbewegungen mit zunehmender Amplitude ausarten. In den ausgebogenen Teilen bilden sich Zwischentropfen, und schließlich zersplittert der Strahl vollkommen. Bei nur wenig gesteigerten Reynoldsschen Zahlen springt der Zerstäubungskegel bis an die Düsenmündung zurück.

Die kinematographischen Aufnahmen mit Frequenzen zwischen 200 und 12000 Bildern in der Sekunde sind im Institut für Technische Strömungsforschung, Leiter Prof. Föttinger, an der Technischen Hochschule Berlin, mit dem dort entwickelten Thunschen Zeitdehner gemacht worden. 641

Über die Blasiusschen Formeln und den Druckmittelpunkt eines Profils.

Von *Theodor Pöschl* in Karlsruhe.

Der Vektor der Kraft, die auf einen Körper in einer ebenen Flüssigkeitsströmung übertragen wird, ist durch den Ausdruck gegeben

$$\mathfrak{P} = \oint p\, ds\, \mathfrak{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1);$$

dabei ist $\mathfrak{n}$ ein nach dem Innern des „Profils" gerichteter Einheitsvektor und das Integral über dessen Umfang zu erstrecken. Wenn X, Y die Komponenten von $\mathfrak{P}$ nach zwei Koordinatenachsen x, y sind, so ist bekannt, daß sich $P = X - iY$ in sehr einfacher Weise darstellen läßt. Hierzu hat man nur die obige Gleichung in komplexer Form zu schreiben, was durch die Zuordnung geschieht

$$\mathfrak{P} \to \overline{P} = X + iY, \qquad \mathfrak{n}\, ds \to i\, dz,$$

wobei unter $dz = dx + i\,dy$ ein Element des Randes verstanden ist und $\overline{P}$ die zu P konjugiert komplexe Zahl bedeutet. Ist $w = u - iv$ die Geschwindigkeit, so ist der Druck

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2) = p_0 - \frac{\varrho}{2} w \overline{w},$$

und daher läßt sich Gl. (1), da das Integral über p_0 verschwindet und fortgelassen werden kann, in der Form schreiben

$$\overline{P} = \oint p\, i\, dz = -\frac{i\varrho}{2} \oint w \overline{w}\, dz.$$

Da das gegebene Profil eine Stromlinie ist, so haben dz und $\overline{w}$ denselben Arcus; es ist daher auch

$$\frac{dz}{\overline{w}} = \frac{d\overline{z}}{w}, \quad \text{oder} \quad w\, dz = \overline{w}\, d\overline{z},$$

und somit

$$\boxed{P = \frac{i\varrho}{2} \oint w^2\, dz} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Das auf das Profil übertragene Moment M ist gegeben durch

$$M = \oint p\,d\,s\,\frac{\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} \qquad (3).$$

Auch hier wird bekanntlich die Rechnung wesentlich vereinfacht, wenn man die Hilfsgröße hinzunimmt

$$N = \oint p\,d\,s\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{n}) \qquad (4)$$

und die komplexe Größe betrachtet

$$T \equiv M + i\,N = \oint p\,d\,s\left\{\frac{\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} + i\,(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n})\right\} = -\frac{\varrho}{2}\oint w\,\overline{w}\left\{\frac{\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}}{\mathfrak{k}} + i\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{n})\right\}d\,s \qquad (5).$$

Wir beachten nun, daß das Produkt zweier komplexer Zahlen mit dem äußeren und inneren Produkt der zugehörigen Vektoren in der folgenden Beziehung steht

$$\frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{\mathfrak{k}} + i\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = i\,a\,\bar{b};$$

macht man daher die Zuordnung $\mathfrak{r}\rightarrow z$, $\mathfrak{n}\,d\,s\rightarrow i\,d\,z$, so erhält man nach neuerlicher Benützung von $w\,d\,z = \overline{w}\,d\,\bar{z}$

$$\boxed{T = -\frac{\varrho}{2}\oint w^2\,z\,d\,z} \qquad (6).$$

Um auch für N eine Deutung zu erhalten, führen wir einen Punkt $\mathfrak{r}_0\rightarrow z_0 \equiv x_0 + i\,y_0$ auf $\mathfrak{P}$ ein, so daß

$$M = x_0\,Y - y_0\,X = \frac{\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{P}}{\mathfrak{k}};$$

dadurch ist erst die zu $\mathfrak{P}$ senkrechte Komponente von z_0 bestimmt. Es ist naheliegend, den Punkt z_0 auf der Wirkungslinie von $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung festzulegen

$$N \equiv \oint p\,d\,s\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{n}) = \mathfrak{r}_0\,\mathfrak{P} = x_0\,X + y_0\,Y;$$

dann ist (da $P = X - i\,Y$)

$$T \equiv M + i\,N = \frac{\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{P}}{\mathfrak{k}} + i\,(\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{P}) = i\,z_0\,P,$$

und es folgt

$$\boxed{z_0 = \frac{\oint w^2\,z\,d\,z}{\oint w^2\,d\,z}} \qquad (7).$$

Man kann diesen Punkt z_0 als „Druckmittelpunkt des Profils“ bezeichnen; er ergibt sich gemäß dieser Gleichung als „Schwerpunkt“ des mit der „Masse“ w^2 belegten Profilumfangs.

Was die Bedeutung von N betrifft, so ist zu sagen, daß N nichts anderes ist, als die schon vor hundert Jahren von A. F. Möbius in die Statik eingeführte „Sicherheitsfunktion“, die später von R. Clausius als „Virial“ bezeichnet wurde. Die Lage von z_0 wäre unmittelbar für die (statische) Stabilität des Tragflügels entscheidend, wenn die Luftkräfte bei der Drehung des Flügels konstant angenommen werden könnten — nur auf diesen besonderen Fall beziehen sich die Untersuchungen von Möbius und anderer Forscher, die sich nach Möbius mit diesem Gegenstand beschäftigt haben. Da z_0 (unter den üblichen Annahmen) oberhalb des Profils liegt, so wäre das Gleichgewicht, das man etwa unter Hinzunahme eines konstanten Eigengewichts erhält, stabil. Bei der Drehung des Flügels sind jedoch die Luftkräfte mit dem Anstellwinkel α in bekannter Weise veränderlich; dies hat zur Folge, daß das „Metazentrum“ — als Angriffspunkt dieser Luftkräfte — unter das Profil zu liegen kommt, was statische Instabilität bedeutet.

Die nähere Ausführung für verschiedene Profilformen und der Schriftennachweis wird an anderer Stelle gegeben.

Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche.

Von *L. Prandtl* in Göttingen.

1. Für verschiedene feinere Fragen der Tragflügeltheorie reicht die Behandlung des Tragflügels als „tragende Linie" nicht mehr aus. Es muß vielmehr eine „tragende Fläche" betrachtet werden, wobei aber ebenfalls, wie in der Theorie der tragenden Linie, alle Ansätze durch Annahme kleiner Störungsgeschwindigkeiten linearisiert werden. Die ältere Theorie der tragenden Fläche gründet sich auf Ansätze, die auf meine Veranlassung hin von W. Ackermann und W. Birnbaum[1]) durchgeführt worden sind. Damals wurde das Wirbelsystem in den Vordergrund gestellt. Es zeigt sich nun, daß ein anderer Zugang zur Theorie der tragenden Fläche dadurch gewonnen werden kann, daß man von dem Feld des Beschleunigungsvektors $\mathfrak{b}=\frac{D\mathfrak{w}}{dt}$ ausgeht. Unter Annahme eines reibungslosen Mediums hat man die Eulersche Gleichung, die in unserer Bezeichnung lautet

$$\mathfrak{b}+\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Da wir auch Homogenität annehmen, ist

$$\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p=\operatorname{grad}\left(\int\frac{dp}{\varrho}\right).$$

Damit wird auch $\mathfrak{b}$ ein Gradient. Bei Einführung eines „Beschleunigungspotentials" φ ist also $\mathfrak{b}=\operatorname{grad}\varphi$. Damit kann (1) integriert werden zu:

$$\varphi+\int\frac{dp}{\varrho}=f(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die willkürliche Zeitfunktion $f(t)$ wird dabei, wenn im Unendlichen die ungestörte Strömung herrscht, zu einer Konstanten. Gl. (2) dient zur Druckermittlung, sobald das Beschleunigungspotential gegeben ist.

2. An der tragenden Fläche weist der Druck einen Sprung auf, gemäß (2) also auch φ. Überall außerhalb der tragenden Fläche ist für Fluggeschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit p stetig, daher auch φ stetig (bei Überschallgeschwindigkeit die bekannten Unstetigkeiten!). Die Betrachtung ist bis hierher streng. Die Einführung der Linearisierung erlaubt nun, auch im Falle des zusammendrückbaren Mediums,

a) φ aus einer „Doppelbelegung"[2]) herzuleiten (bei Volumbeständigkeit wäre dieser Schritt noch streng ausführbar, bei Zusammendrückbarkeit ist er aber nur bei kleinen Druckamplituden zulässig),

b) die Doppelbelegung auf der xy-Ebene statt auf der tragenden Fläche anzunehmen (Voraussetzung hierfür sind kleine Anstellwinkel und Wölbungen).

Der Aufbau von φ kann durch Überlagerung aus den Feldern der differentiellen Dipole erfolgen (bei Zusammendrückbarkeit retardierte Potentiale!), im stationären Fall auch mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (volumbeständig $\Delta\varphi=0$, kompressibel mit $c=$ Schallgeschwindigkeit) $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

3. Durch die Doppelbelegung, deren Intensität überall derjenigen des Drucksprungs entspricht, ist das Beschleunigungspotential φ im ganzen Raum definiert. Es ist jetzt aus φ das Geschwindigkeitsfeld zu ermitteln. Die Rechnung für den stationären Flugzustand habe ich in meinem Aufsatz „Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium" in der Luftfahrtforschung Bd. 13 (1936), S. 313, Abschnitt I veröffentlicht. Inzwischen habe ich, angeregt durch ein Gespräch mit Herrn W. Kinner, auch den nichtstationären Fall untersucht, wo der Potentialsprung außer von den Grundrißkoordinaten auch von der Zeit abhängt. Es zeigte sich, daß auch dieser allgemeinere Fall grundsätzlich durchführbar ist.

Die Fluggeschwindigkeit, die als zeitlich konstant angesehen werden soll, sei V. Die x-Achse liege in Flugrichtung (x nach hinten positiv), die y-Achse in Richtung des Holms, die z-Achse senkrecht. Bei Vernachlässigung der zweiten Ordnung wird, mit $\mathfrak{w}=$ Geschwindigkeitsvektor,

$$\mathfrak{b}=\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t}+V\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x}.$$

[1]) Diese Zeitschrift 3 (1923), S. 290, und 4 (1924), S. 277, vgl. auch H. Blenk, diese Zeitschrift 5 (1925), S. 36.
[2]) Vgl. etwa Prandtl-Tietjens, Bd. 1 (1929), S. 188 u. f. oder auch Luftfahrtforschung Bd. 13 (1936), S. 314.

Nach Einführung von $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$ und $\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \Phi$ und Integration wird

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (3).$$

Wenn $\varphi(x, y, z, t)$ gegeben ist, dann findet man aus (3)

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{x} \varphi\left(x', y, z, t - \frac{x - x'}{V}\right) d x' \qquad (4)$$

(Beweis am bequemsten durch Gradientbildung auf beiden Seiten und Ersetzung von x' durch $x - V(t - t')$; dies liefert $\mathfrak{w}$ als Zeitintegral von $\mathfrak{v}$ bei festgehaltenem Teilchen.) Für stationäre Zustände wird hieraus

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{x} \varphi(x', y, z) \, d x' \qquad (5).$$

4. Die Gestalt der tragenden Fläche $z = z(x, y, t)$ wird, wieder auf erste Ordnung genau, erhalten aus der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

mit Hilfe der Beziehung

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Die Lösung lautet ähnlich wie (4)

$$z = \frac{1}{V} \int_{0}^{x} w\left(x', y, 0, t - \frac{x - x'}{V}\right) d x' + F\left(y, t - \frac{x}{V}\right) \qquad (6).$$

Die Funktion F dient dazu, eine willkürlich gegebene Lage und Bewegung der Flügelvorderkante zuzulassen.

5. Es mag auffallen, daß das Wirbelband in dieser Darstellung keine Rolle spielt. Es wird selbstverständlich bei Auswertung des Geschwindigkeitsfeldes auf Grund von Gl. (4) und (5) erhalten, da φ oberhalb und unterhalb der tragenden Fläche verschiedene Werte hat. Darin, daß man es zur Durchführung der Rechnung nicht braucht, besteht der Gewinn der neuen Darstellung. Im übrigen sorgen Integrationsschwierigkeiten dafür, daß die Rechnung nur bei verhältnismäßig einfachen Berandungen der tragenden Fläche zu dem gewünschten Erfolge führt. Die Belegungen müssen zunächst auch einfach gewählt werden, man hat aber das Mittel der Überlagerung zur Verfügung, um auch verwickeltere Belegungen zu behandeln. Über zwei solche Fälle berichten die nachfolgenden Vorträge der Herren W. Kinner und H. Schlichting. 632

Über einige Probleme der versteiften Schalen im Flugzeugbau.

Von *E. Schapitz* in Berlin-Adlershof.

Durch die Einführung der Schalenbauweise für die Rümpfe und Flügel der neueren Flugzeuge ist eine Reihe von Festigkeitsfragen dringend geworden. Ein wesentlicher Teil derselben bezieht sich auf den Verformungswiderstand ausgebeulter Blechfelder, da bei versteiften Schalen die Haut vielfach ausbeult, ehe die Bruchfestigkeit der Gesamtkonstruktion erreicht ist. Die Bauteile werden auf Grund der letzteren dimensioniert. Hierbei muß die Spannungsverteilung in der ausgebeulten Haut bekannt sein, da die letztere bei Druck teilweise mitträgt und bei Schub die Versteifungen infolge der mit dem Ausbeulen verbundenen Spannungsumlagerung zusätzlich belastet. In vielen Fällen muß auch die Steifigkeit des Bauteiles nach dem Ausbeulen der Haut berechnet werden können. — Als Schema wird zweckmäßig die versteifte Kreiszylinderschale eingeführt (Abb. 1).

Bei der Berechnung der versteiften Schalen ist die Kenntnis der Beulfestigkeit des gekrümmten Streifens wesentlich. Für Druckbeanspruchung hat Redshaw[1]) eine Beulbedingung aufzustellen versucht. Für Schub und für das Zusammenwirken von Druck

[1]) S. C. Redshaw: The elastic instability of a thin curved panel, Aeron. Res. Comm. Rep. and Mem. 1565, London 1934.

und Schub fehlen bis jetzt theoretisch begründete Ansätze. Die Tragfähigkeit nach dem Ausbeulen ist bisher noch für keine Beanspruchungsart untersucht worden. Man hat deshalb Berechnungsverfahren auf Grund zweier anschaulicher Hilfsvorstellungen, der mittragenden Breite und des Zugfeldes, entwickelt.

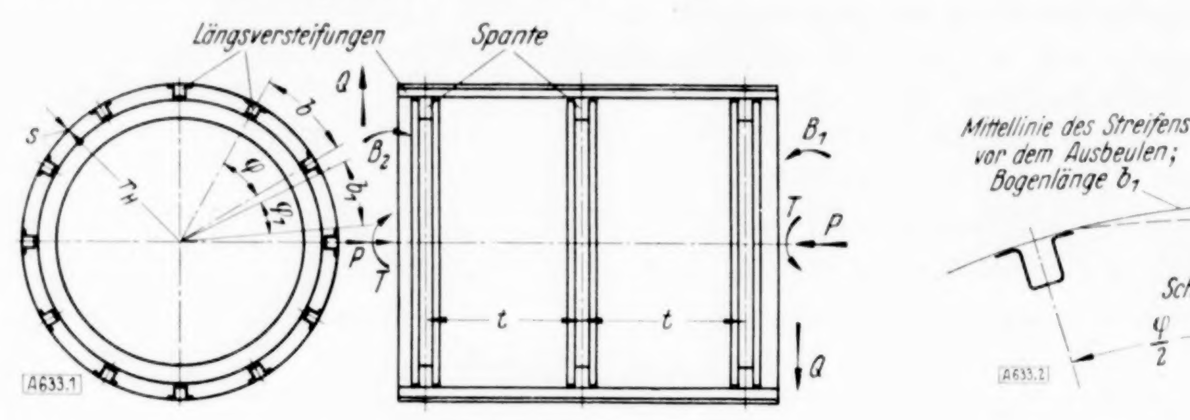


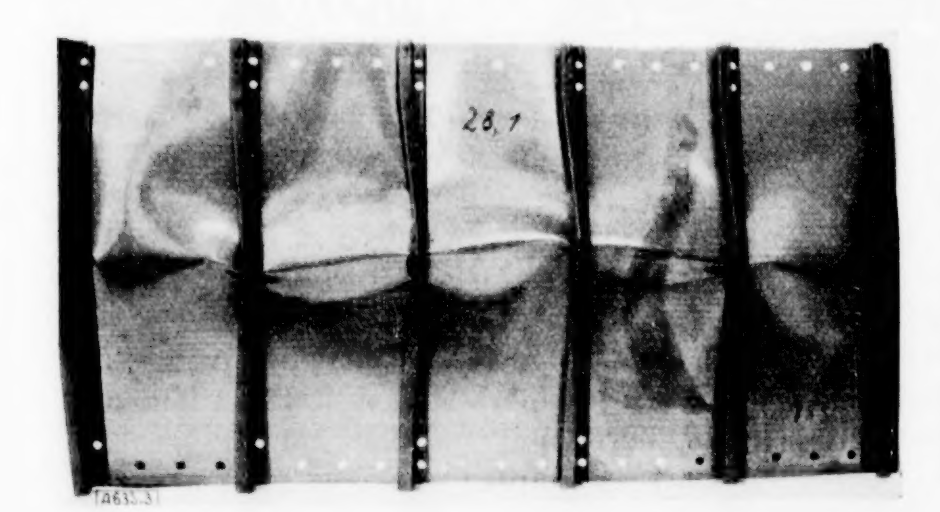
Abb. 1. Schema der versteiften Kreiszylinderschale.

Abb. 2. Schema der Faltung $\zeta_y = \frac{b_1 - b_1'}{b_1}$.

Die **mittragende Breite** b_m ist durch den Ansatz $b_m = b\,\frac{\bar{\sigma}_n}{\sigma_x}$ definiert, worin $\bar{\sigma}_n$ die mittlere Spannung im Hautstreifen und σ_x die Spannung in seinen Randversteifungen (Abstand b) bedeuten. Bei der von H. Wagner entwickelten **Zugfeldtheorie**[2]) wird angenommen, daß diejenige Hauptspannung σ_2, welche bei Schub Druckspannung ist, nach dem Ausbeulen dem Betrage nach sehr klein gegenüber der Hauptzugspannung σ_1 wird und deshalb durch geeignete Annahmen erfaßt werden kann. Die Spannungshauptachsen sollen überall mit den Dehnungshauptachsen zusammenfallen. Das Dehnungsfeld wird als homogen angenommen. Zu der Umfangsdehnung infolge der Formänderung der Versteifungen tritt beim gekrümmten Streifen eine geometrische Verkürzung (Faltung ζ_y), weil der Bogen der Mittellinie, welche die Faltenprofile ausgleicht, kürzer ist als der Bogen der Mittellinie des Streifenquerschnitts vor dem Ausbeulen (Abb. 2). Mit diesen Annahmen errechnen sich bei Schub (z. B. Drillung) die Spannungen in der Haut und in den Versteifungen auf Grund von Überlegungen der elementaren Festigkeitslehre.

Durch Druckversuche mit Platten und Teilschalen wird die mittragende Breite in Abhängigkeit von der Spannung σ_x in den Randversteifungen ermittelt; sie nimmt nach dem Ausbeulen zunächst rasch, später langsamer ab. Bei der Zugfeldtheorie des gekrümmten Streifens wird die Größe der Hauptspannung σ_2 in der **Feldmitte** zwischen den Versteifungen durch eine Annahme festgelegt. Dann kann man aus Drillversuchen mit versteiften Kreiszylinderschalen[3]) Schlüsse auf die **Verteilung** der Hauptspannung σ_2 und die Faltung ζ_y ziehen.

Im Falle **kombinierter Druck- und Schubbeanspruchung** verliert der Begriff der mittragenden Breite seine anschauliche Bedeutung, sobald $\bar{\sigma}_n > \sigma_x$ wird oder beide Spannungen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Man kann aber die Zugfeldtheorie dahin erweitern, daß auch Fälle zusammengesetzter Beanspruchung erfaßbar werden und erhält damit ein einheitliches Rechenschema für alle Beanspruchungen. Den Ausgangspunkt hierfür bietet das „unvollständige Zugfeld"[3]), bei welchem der Einfluß der Randversteifungen auf das Spannungsfeld im auf Schub ausgebeulten Blech berücksichtigt wird.



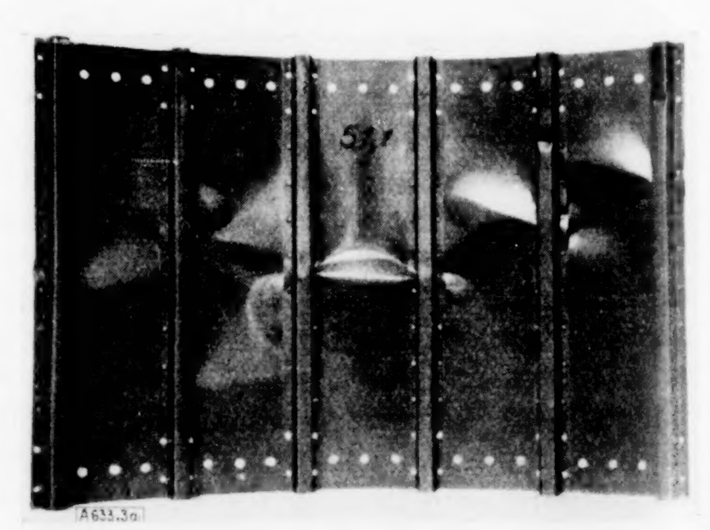


Abb. 3. Bruchbilder von Teilschalen (Druckversuche).

[2]) H. Wagner: Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech, Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 20 (1929), Heft 8 bis 12.

[3]) E. Schapitz: Über die Drillung dünnwandiger, versteifter Kreiszylinderschalen, Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung.

Bei reiner Biegung einer versteiften Kreiszylinderschale ist die Spannungsverteilung über die Höhe auch bei ausgebeulter Haut linear. Die Haut ist hierbei an der Druckseite, soweit sie ausgebeult ist, nur nach Maßgabe der mittragenden Breiten für das Trägheitsmoment des Schalenquerschnitts einzusetzen; das letztere hängt also vom jeweiligen Biegemoment ab.

Für die Bruchfestigkeit ist bei Druck und Biegung meist die Knickfestigkeit der Längsversteifungen maßgebend; man kann deshalb häufig aus Druckversuchen mit Teilschalen befriedigende Schlüsse auf die Festigkeit von Vollschalen ziehen. Für die Profilknickung kommt außer der gewöhnlichen Stabknickung auch das Verdrehknicken und das Ausbeulen der Profilwände in Frage (Abb. 3). Bei Drillung der Kreiszylinderschalen ist für die Bruchfestigkeit die Knickbiegefestigkeit der Längsversteifungen maßgebend (Abb. 4), sofern die Spante hinreichend stark sind, um den nach dem Ausbeulen der Haut entstehenden allseitig radialen Druck auszuhalten.

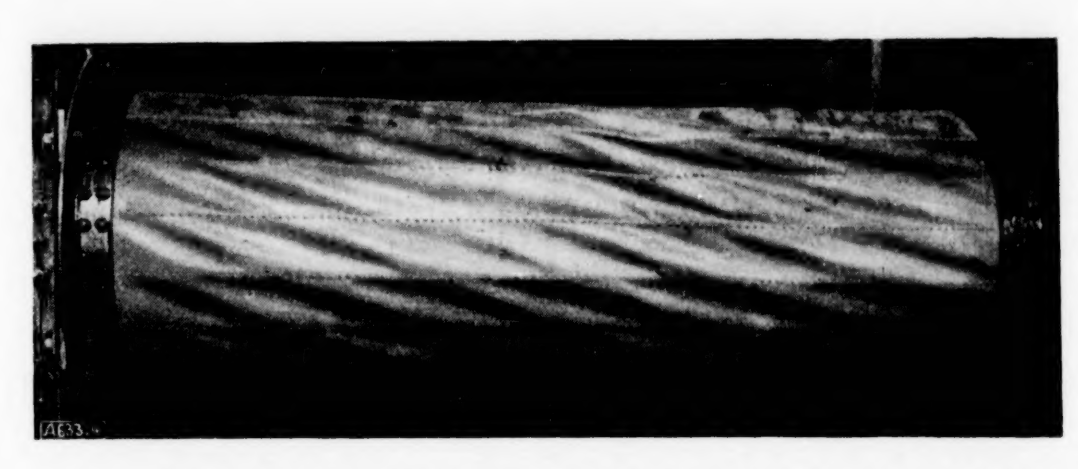


Abb. 4. Bruchbild einer versteiften Kreiszylinderschale bei reiner Drillung.

Die theoretische Weiterarbeit hätte zunächst an den Beulbedingungen für den gekrümmten Streifen anzusetzen. Darüber hinaus müßte mit den energetischen Methoden der Elastizitätstheorie die Tragfähigkeit eines gekrümmten Streifens nach dem Ausbeulen unter verschiedenartigen Beanspruchungen untersucht werden, um die Berechtigung der bei den Näherungsrechnungen eingeführten Annahmen zu prüfen. 633

Tragflügeltheorie bei Ueberschallgeschwindigkeit[1].

Von *H. Schlichting* in Friedrichshafen a. B.

Auf Grund neuerer Ansätze von Prof. Prandtl[2]) ist eine Theorie des Tragflügels endlicher Länge bei Überschallgeschwindigkeit entwickelt worden. Dabei werden die gleichen Voraussetzungen wie bei der inkompressiblen Tragflügeltheorie gemacht, nämlich, daß die vom Tragflügel hervorgerufenen Störungsgeschwindigkeiten klein sind gegen die Fluggeschwindigkeit V. Daraus folgt, daß auch die Dichte- und Druckunterschiede klein sind gegenüber dem mittleren Druck und der mittleren Dichte. Dies führt zur Linearisierung des Problems, und damit erhält man auch für die Überschallströmung die Möglichkeit, durch Superposition neue Lösungen zu gewinnen, was sonst für kompressible Strömungen im allgemeinen nicht zutrifft. Das strömende Medium wird auch hier als reibungslos betrachtet.

Von der inkompressiblen Strömung unterscheidet sich die Tragflügelströmung bei Überschallgeschwindigkeit grundsätzlich dadurch, daß auch beim unendlich langen Flügel (ebenes Problem) ein durch die erzeugten Schallwellen bedingter Widerstand, der sog. Wellenwiderstand, vorhanden ist. Für die unendlich dünne ebene Platte der Tiefe t z. B. ist der Auftrieb A und Wellenwiderstand W pro Längeneinheit der Spannweite

$$A = 4\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\beta_0\cdot t\cdot q \qquad \text{bzw.} \quad W = \beta_0 A \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

[β_0 = Anstellwinkel, α = Machscher Winkel, $q = \frac{\varrho}{2} V^2$ = Flugstaudruck, ϱ = Dichte]

und die Polare des Wellenwiderstandes

$$c_w = \frac{c_a^{\,2}}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

[1]) Die Ausführungen des Verfassers knüpfen an den Vortrag von L. Prandtl, dieses Heft S. 360, an.
[2]) L. Prandtl: Theorie des Tragflügels im zusammendrückbaren Medium. Luftf.-Forschung Bd. 13, S. 313 (1936).

Die Theorie des **Tragflügels endlicher Länge** bei Überschallgeschwindigkeit läßt sich auf folgender Grundlage aufbauen: Das Potential Φ_T der tragenden Linie ergibt sich durch die Operation

$$\Phi_T(x, y, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int\limits_{x'=-\infty}^{x'=x} \frac{\partial \Phi_Q(x', y, z)}{\partial z}\, d x' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

aus einem Quellpotential Φ_Q. Dabei bedeutet $\Phi_T\ (x, y, z)$ das Potential eines tragenden Elementes mit der Zirkulation Γ um die y-Achse (x, y, z = rechtwinkelige Koordinaten). Für eine im Punkt $x = y = z = 0$ befindliche Quelle, die in Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit $V > c$ angeströmt wird (c = Schallgeschwindigkeit), ist das Quellpotential

$$\Phi_Q = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right](y^2 + z^2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Dieses Potential ist reell nur innerhalb des Doppelkegels mit dem halben Öffnungswinkel α, dessen Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Außerhalb ist es der Formel nach imaginär, in Wirklichkeit ist es dort identisch Null zu nehmen. Physikalische Realität hat das Potential Φ_Q jedoch nur im „Nachkegel" des Punktes $x = y = z = 0$. Im „Vorkegel" ist es ebenfalls identisch Null zu nehmen. Das Potential (4) und die Operation (3) bilden den Grundstein für den Aufbau beliebiger Tragflügelpotentiale für Überschallgeschwindigkeit.

Durch Superposition kann man hieraus die tragende Linie und die tragende Fläche für verschiedene Auftriebsverteilungen und damit auch den induzierten Widerstand erhalten. Es sind auf dieser Grundlage bisher folgende Aufgaben behandelt worden[3]):

1. Die tragende Linie mit konstanter Auftriebsverteilung längs der Spannweite („Hufeisenwirbel").
2. Die tragende Fläche mit rechteckigem Grundriß und konstanter Flächendichte des Auftriebs.
3. Die tragende Fläche mit trapezförmigem Grundriß und konstanter Flächendichte des Auftriebs.
4. Der unverwundene Rechteckflügel; Berechnung der Auftriebsverteilung.

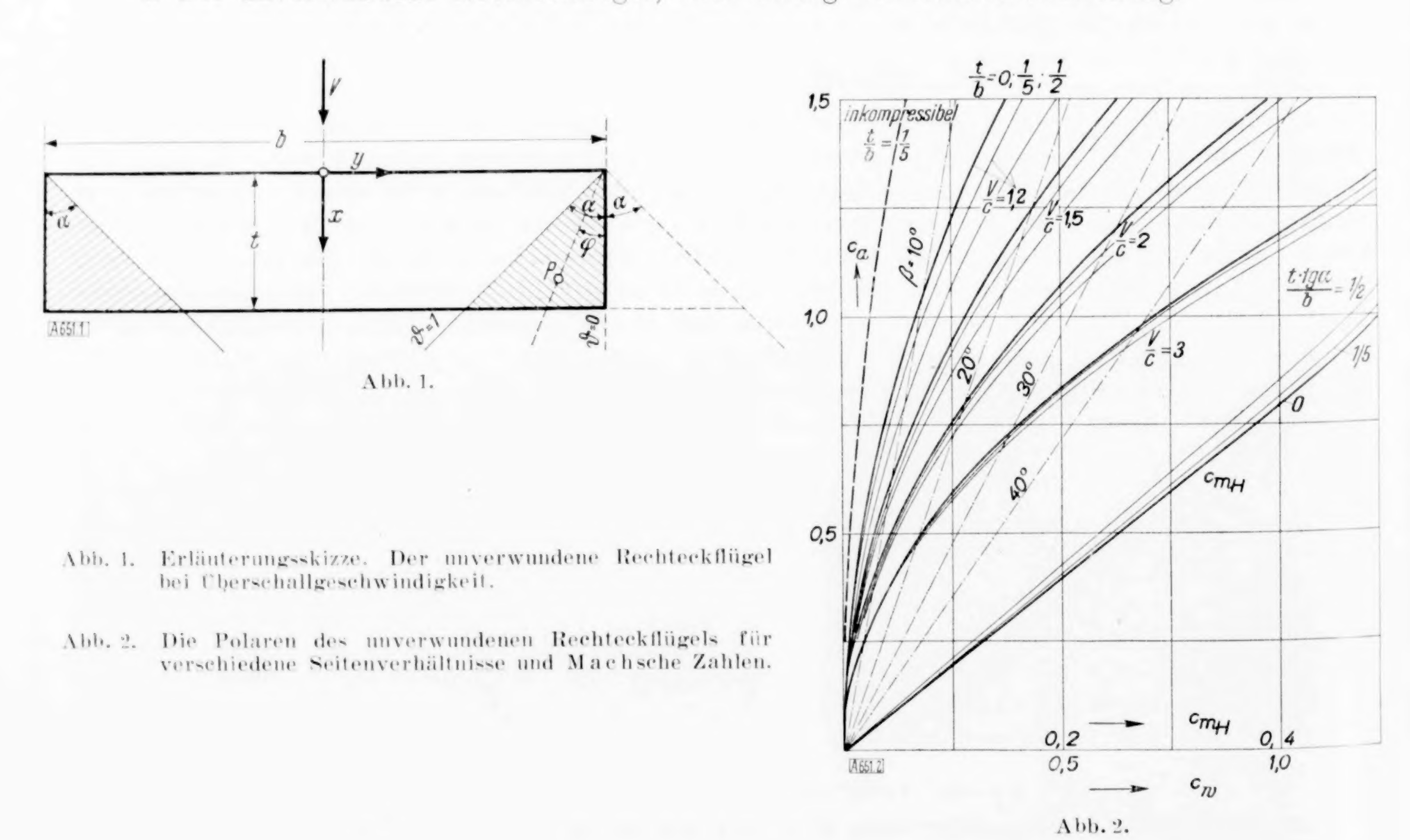


Abb. 1.

Abb. 2.

Abb. 1. Erläuterungsskizze. Der unverwundene Rechteckflügel bei Überschallgeschwindigkeit.

Abb. 2. Die Polaren des unverwundenen Rechteckflügels für verschiedene Seitenverhältnisse und **Mach**sche Zahlen.

[3]) Vgl. H. Schlichting: Tragflügeltheorie bei Überschallgeschwindigkeit. Luft.-Forschung Bd. 13, S. 320 (193

Ebenso wie bei der inkompressiblen Strömung erweist sich auch bei der Überschallströmung der Ersatz des Flügels durch eine tragende Linie mit konstanter Zirkulation (Fall 1) für die Berechnung des induzierten Widerstandes als unzulässig. Diese Schwierigkeit wird bei der inkompressiblen Strömung dadurch vermieden, daß man unter Beibehaltung der tragenden Linie die Zirkulation am Flügelende in geeigneter Weise auf Null abnehmen läßt. Für die Überschallströmung genügt dies jedoch nicht. Um zu einer Berechnung des induzierten Widerstandes zu gelangen, hat man hier außerdem noch den Übergang zur tragenden Fläche zu vollziehen (Fall 2 und 3).

Für den praktisch sehr wichtigen Fall 4 des unverwundenen Rechteckflügels seien die Ergebnisse hier kurz mitgeteilt. Außerhalb der beiden von den Endpunkten der Vorderkante (Abb. 1) nach hinten abgehenden M a c h schen Kegel ist der Auftrieb konstant und infolgedessen der induzierte Widerstand gleich Null. Innerhalb der schraffierten Dreiecke fällt der Auftrieb vom Wert γ_0 auf dem Kegelmantel auf $\gamma = 0$ an der seitlichen Flügelkante ab. Für die Auftriebsverteilung $\gamma = \gamma_0 f(\vartheta)$ ergibt sich die Integralgleichung

$$f(\vartheta) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Theta=0}^{\Theta=1} f'(\Theta)\, F(\vartheta, \Theta)\, d\Theta = 1 \quad \ldots \quad (5)$$

mit

$$F(\vartheta, \Theta) = \int\limits_{\vartheta'=1}^{\vartheta'=\vartheta} \frac{\sqrt{1-\vartheta'^2}\, d\vartheta'}{\vartheta'(\vartheta'-\Theta)} \quad \ldots \quad (6)$$

und den Randbedingungen:

$$\vartheta = 0 : f(\vartheta) = 0 \qquad \vartheta = 1 : f(\vartheta) = 1 \quad \ldots \quad (7).$$

Dabei ist $\vartheta = \operatorname{tg}\varphi / \operatorname{tg}\alpha$ nach Abb. 1.

Durch Lösung dieser Integralgleichung erhält man für die aerodynamischen Beiwerte des unverwundenen Rechteckflügels:

$$c_a = 4\beta_0 \operatorname{tg}\alpha\,(1 - 0{,}316\,\lambda) \qquad (c_w)_{w+i} = \frac{c_a^2}{4 \operatorname{tg}\alpha}\,\frac{1}{1 - 0{,}316\,\lambda} \qquad c_{mH} = c_a \frac{\frac{1}{2} - 0{,}211\,\lambda}{1 - 0{,}316\,\lambda} \quad (8\text{a, b, c}).$$

$$\lambda = \frac{t \operatorname{tg}\alpha}{b} = \text{reduziertes Seitenverhältnis.}$$

$\Big|(c_w)_{w+i}$ = Beiwert von (Wellen = + induziertem) Widerstand.

$c_{mH} = \dfrac{M_H}{F\,q\,t}$ = Beiwert des Momentes um die Querachse in Flügelvorderkante$\Big|$.

In Abb. 2 sind die Polaren des unverwundenen Rechteckflügels für die Seitenverhältnisse $\frac{t}{b} = 0,\ {}^1/_5,\ {}^1/_2$ und für die M a c h schen Zahlen $V/c = 1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 3{,}0$ angegeben. Zum Vergleich ist die inkompressible Polare für $t/b = \frac{1}{5}$ eingetragen. Die Gleitzahlen sind bei der Überschallströmung erheblich schlechter als bei der inkompressiblen Strömung. Die Widerstandsunterschiede zwischen Flügeln mit verschiedenem Seitenverhältnis sind jedoch bei der Überschallströmung beträchtlich geringer als bei der inkompressiblen Strömung, da im ersteren Fall der größte Anteil des Widerstandes auf den Wellenwiderstand entfällt, der unabhängig vom Seitenverhältnis ist. Der ebene Rechteckflügel ist bei Überschallströmung ein druckpunktfestes Profil, wenn man vom Reibungswiderstand absieht. Für den unendlich langen Flügel liegt der Druckpunkt auf der halben Flügeltiefe, und mit abnehmendem Seitenverhältnis rückt er etwas nach vorn.

Die Formel (8b) ist ein Analogon zu der bekannten Formel $c_{wi} = c_a^2\, F / \pi b^2$ der elliptischen Auftriebsverteilung bei inkompressibler Strömung. Ebenso wie diese gestattet sie auch die Umrechnung von e i n e m reduzierten Seitenverhältnis $\lambda_1 = t_1 \operatorname{tg}\alpha_1 / b_1$ auf ein a n d e r e s $\lambda_2 = t_2 \operatorname{tg}\alpha_2 / b_2$.

Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie.

Von *Harry Schmidt* in Berlin-Adlershof.

Die Grundaufgabe der Theorie der tragenden Linie, für eine vorgegebene Tiefen- und Anstellwinkelverteilung die zugehörige Zirkulationsverteilung zu ermitteln, führt nach L. Prandtl auf eine hochgradig singuläre Integrodifferentialgleichung, während man E. Trefftz eine sehr elegante potentialtheoretische Formulierung dieses Problems zu verdanken hat.

Im Anschluß an die Trefftzsche Formulierung läßt sich nun durch einfache Fortsetzungsvorschriften für die Tiefen- und Anstellwinkelverteilungen eine Zurückführung der Fragestellung auf das dritte Randwertproblem der Potentialtheorie für das Außengebiet eines Kreises erreichen; die einschlägigen Existenz- und Unitätssätze der Potentialtheorie ergeben alsdann unter Voraussetzung stückweise stetiger Tiefen- und Anstellwinkelverteilungen die Existenz einer einzigen, längs der ganzen tragenden Linie stetigen Zirkulationsverteilung, die sich nach Übertragung auf den Einheitskreis in eine daselbst absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickeln läßt. Die strenge Lösung des Randwertproblems kann für den beliebig verwundenen elliptischen Flügel auf potentialtheoretischem Wege in geschlossener Form gewonnen werden, während bei sehr allgemeinen Klassen nicht-elliptischer Tiefenverteilungen eine funktionentheoretische Methode gleichfalls zu strengen, in geschlossener Form dargestellten Lösungen führt. Die Entwicklungskoeffizienten der zugehörigen Potentialfunktion genügen einem unendlichen linearen Gleichungssystem, das der Erh. Schmidtschen Auflösungstheorie zugänglich ist.

Eine ausführliche Veröffentlichung der Arbeit erfolgt demnächst in dieser Zeitschrift.

634

Der Spannungsverlauf in umlaufenden Scheiben mit exzentrischen Löchern.

Von *F. Schultz-Grunow* in Göttingen.

Bisher hat sich die Elastizitätstheorie entweder mit Vollscheiben, oder mit Scheiben, die ein zentrisches Loch besitzen, befaßt. Aber auch Scheiben mit exzentrischen Löchern sind von praktischer Bedeutung. Es soll daher gezeigt werden, wie der Spannungsverlauf bei beliebig vielen Löchern endlichen Durchmessers in Scheiben konstanter und schwach veränderlicher Dicke exakt ermittelt werden kann. Dabei wird es sich um die Lösung eines ebenen Randwertproblems handeln, das insofern von Interesse ist, als eine Aufgabe dieser Art, d. h. exzentrische Kreisränder mit veränderlicher Belastung, bisher nicht behandelt worden ist.

Dem Spannungszustand der Vollscheibe wird ein solcher überlagert, welcher von Spannungen an den Lochrändern hervorgerufen wird, die gleichgroß, aber entgegengesetzt gerichtet zu jenen sind, die in den entsprechenden Kreisschnitten der Vollscheibe auftreten. Offenbar werden hierdurch die an den Löchern herrschenden Randbedingungen erfüllt. Die Randspannungen formulieren sich in Ausdrücken

$$\sigma_r = A_0 + A_1 \cos \Theta + A_2 \cos 2\,\Theta, \qquad \tau = B_1 \sin \Theta + B_2 \sin 2\,\Theta$$

und haben pro Loch eine Resultierende, welche gleich dem Auftrieb

$$A = \varrho\, \omega^2\, b\, a^2 \pi$$

des Loches ist. Es bedeuten σ_r = Normal-, τ = Schubspannung, ϱ = Dichte des Scheibenmaterials, ω = Winkelgeschwindigkeit, b = Abstand des Lochmittelpunktes vom Scheibenzentrum, a = Lochradius; die Wandstärke h der Scheibe ist vorläufig = 1 gesetzt, der Winkel Θ ist in Abb. 1 angegeben. Die Reaktionskraft A tritt im Scheibenzentrum als Einzelkraft auf, wenn man die Welle der besseren Übersicht halber als unendlich dünn voraussetzt.

Beschränkt man sich zunächst auf ein einziges Loch, so hat man also folgendes Randwertproblem zu lösen: Vorgegebene Spannungen am Lochrande mit nach dem Scheibenzentrum gerichteter Resultierender, Einzelkraft im Scheibenzentrum als Reaktionskraft dieser Resultierenden, spannungsfreier Außenrand. Die Lösung des Problems gelingt durch einen zweckmäßig gelegten Kreisschnitt: Durch einen zum Loch konzentrischen Schnitt, der durch den Scheibenmittelpunkt läuft (Abb. 1), entsteht ein Kreisring, der am Innenrande durch Rand-

spannungen und am Außenrande durch eine Einzelkraft belastet ist. Die Einzelkraft läßt A sich in die Reihe

$$\sigma_r = \frac{-A}{b\,\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,\Theta\right]$$

entwickeln, so daß der Spannungsverlauf im Ring und dessen Formänderung exakt ermittelt werden kann mit der Michellschen Lösung für den Kreisring[1]), die ebenfalls eine Fourier-Reihe darstellt. Die Zusammenhangsbedingung der Ränder b des Ringes und des übrigen Scheibenteils kann durch Überlagerung eines weiteren Spannungszustandes im Ring und im übrigen Scheibenteil erfüllt werden, und zwar, wenn man den übrigen Scheibenteil als unendlich ausgedehnt ansieht, ebenfalls mit der Michellschen Lösung. Man erhält dadurch den Außenrand nicht spannungsfrei. Die bisher überlagerten Spannungszustände sollen zur besseren Verdeutlichung als „erste Überlagerung" bezeichnet werden. Um den Außenrand spannungsfrei zu bekommen, überlagert man gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Randspannungen und ermittelt ohne Rücksicht auf das Loch den zugehörigen Spannungszustand der Vollscheibe. Am Lochrande erhält man durch diese „zweite" Überlagerung ebenfalls Spannungen. Berück-

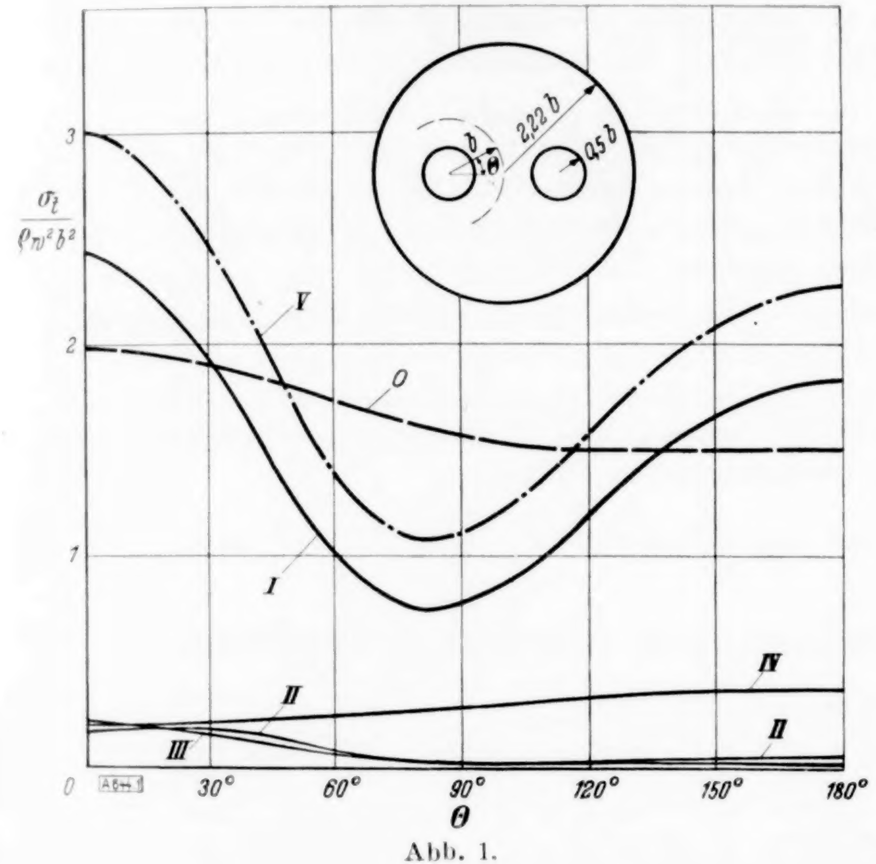


Abb. 1.

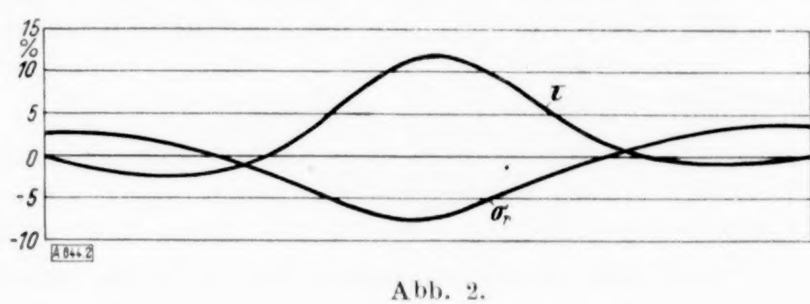


Abb. 2.

Abb. 1. Spannungen am Lochrande.
0 vom Spannungszustand der Vollscheibe
I von der 1. Überlagerung
II von der 1. Überlagerung am anderen Lochrand
III von der 2. Überlagerung (am Außenrand)
IV von der 3. Überlagerung (am Lochrande, Inversion)
V = I + II + III + IV = zusätzliche, am Lochrand auftretende Spannungen.

Abb. 2. Restglieder am Lochrand in Prozenten der Funktion 0 in Abb. 1.

sichtigt man nun die übrigen Löcher, indem man auch auf sie die erste Überlagerung anwendet, so erhält man außer von der zweiten, auch von der ersten Überlagerung an den Löchern Randspannungen. Durch eine dritte Überlagerung, die ähnlich wie die erste durchgeführt wird, erhält man die Lochränder wieder spannungsfrei, dagegen am Außenrande wieder Spannungen. Eine vierte Überlagerung ähnlich der zweiten beseitigt diese wiederum, erzeugt jedoch Spannungen an den Lochrändern. Dieses wechselweise Überlagern von Spannungszuständen stellt eine sukzessive Approximation dar, d. h. die Randspannungen werden immer kleiner, denn sind die Randspannungen wie hier im Gleichgewicht, so lauten die Michellschen Gleichungen für Radial- und Schubspannung auf dieses Problem spezialisiert

a) für die Vollscheibe

$$\sigma_r = 2\,b_0 + 2\,b_1\,r\cos\Theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n\,(1-n)\,a_n\,r^{n-2} + (n+2-n^2)\,b_n\,r^n\right]\cos n\,\Theta,$$

$$\tau = 2\,b_1\,r\sin\Theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n\,(n-1)\,a_n\,r^{n-2} + n\,(n+1)\,b_n\,r^n\right]\sin n\,\Theta,$$

[1]) J. H. Michell: Proc. London M. Soc. 31 (1899).

b) für die unendlich ausgedehnte Scheibe mit zentrischem Loch:

$$\sigma_r = \frac{a_0}{r^2} - \frac{2\,a_1}{r^3}\cos\Theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n\,(1+n)\,a_n\,r^{-n-2} - (n-2+n^2)\,\beta_n\,r^n\right]\cos n\,\Theta,$$

$$\tau = -\frac{2\,a_1}{r^3}\sin\Theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[-n\,(1+n)\,a_n\,r^{-n-2} - n\,(n-1)\,\beta_n\,r^{-n}\right]\sin n\,\Theta.$$

Die Gleichungen offenbaren das Abnehmen der Spannungen vom Rande weg, das um so stärker ist, je höher die Harmonische ist. Daß das erste Glied von σ_r im Falle a) eine Ausnahme macht und im Falle b) nur mit r^{-2} abnimmt, spielt keine Rolle, da für die nullte Harmonische, d. h. für konstante Belastung des Innenrandes und für unbelasteten Außenrand der Spannungszustand durch Inversion exakt ermittelt werden kann.

Daß das Verfahren tatsächlich gut konvergiert, zeigen das in Abb. 1 dargestellte Ergebnis der numerischen Berechnung der dort abgebildeten Scheibe mit zwei Löchern, welches eine maximale Spannungserhöhung von 150% ergibt, und die geringen Werte der übriggebliebenen Randspannungen in Abb. 2. Dabei wurde bei der dritten Überlagerung nur das erste Glied von σ_r berücksichtigt. Auch bei vielen Löchern darf man gute Konvergenz erwarten, da die niedrigste Periode der ersten Harmonischen von den am Außenrand überlagerten Spannungen um so kleiner ist, je mehr Löcher vorhanden sind, und die Spannungen nehmen infolgedessen vom Rande weg um so stärker ab.

Es sei bemerkt, daß man sich bei diametral gegenüberliegenden Löchern, also auch bei dem durchgerechneten Beispiel den Kreisschnitt „b" ersparen kann: Man erfüllt die Gleichgewichtsbedingung nicht am Rande „b" durch die Einzelkraft, sondern am unendlich fernen, zum Loch konzentrischen Rand durch beliebig verteilte Randspannungen.

Handelt es sich um eine Scheibe schwach veränderlicher Dicke, so überlagert man an den Lochrändern ebenfalls die Schnittspannungen der entsprechenden Vollscheibe an entgegengesetzter Richtung und ermittelt den Spannungsverlauf vorerst für konstante Dicke $h = 1$. Die erhaltenen Spannungen rechnet man auf die tatsächliche Scheibendicke um und erhält damit den Spannungsverlauf in der Scheibe veränderlicher Dicke. 644

Freie und erzwungene Schwingungen elastischer Systeme.

Von *E. Sörensen* in Dresden.

Die Differentialgleichung des schwingenden Stabes läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$B\,(x)\cdot y\,(x) = \frac{d^2}{d\,x^2}\left[E\;I\,(x)\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right].$$

(Die Bedeutung der einzelnen Größen ist weiter unten angegeben.) Diese Gleichung ist analytisch in geschlossener Form nicht mehr lösbar, wenn die Funktionen $B\,(x)$ und $E\,I\,(x)$ willkürlich gegeben sind, wie es bei technischen Konstruktionen fast immer der Fall ist. Die obige Gleichung gilt nur, wenn an den Elementen des schwingenden Systems keine äußeren Kräfte (Eigengewicht, Fliehkräfte) angreifen. Dürfen die äußeren Kräfte nicht mehr vernachlässigt werden, dann wird die Differentialgleichung viel verwickelter und läßt eine Lösung in geschlossener Form überhaupt nicht mehr zu. Die Untersuchung derartiger Schwingungsvorgänge ist nur mit Näherungsverfahren möglich.

Ein Beispiel für derartige Systeme ist die Schwingung der in Abb. 1 dargestellten Gruppe von Turbinenschaufeln in Umfangsrichtung unter dem Einfluß der Fliehkraft. Abb. 2 zeigt eine Einzelschaufel aus dieser Gruppe mit den daran angreifenden Kräften. Es bedeutet:

ω = Drehzahl der Turbine
P = Beschleunigungskraft
B = Belastungsfunktion (Schaufelmasse)
V = Querkraft
F = Schaufelquerschnitt
y = größter Schwingungsausschlag
x, u = Längenkoordinaten

λ = Schwingungszahl
Z = Fliehkraft
M = Biegungsmoment
E = Elastizitätsmodul
I = Trägheitsmoment
l = Schaufellänge

Die Schaufeln stehen radial auf dem Turbinenläufer mit dem Radius r_0 und sind hier fest eingespannt. An den Stellen 1 und 2 ist je eine Schaufelgruppe durch eine elastische Bindung zusammengefaßt. Die in der Mittellage kreisförmige Bindung verformt sich zu einer Wellenlinie, wenn die Schaufeln aus der radialen Lage herausschwingen. Sie übt dann auf die Schaufeln die rückbiegenden Momente M_1 und M_2 aus, die man berechnen kann. Gleichzeitig entstehen durch die Bindungsmasse die Beschleunigungskräfte $B_1\,y_1$ und $B_2\,y_2$. Schaufelbelastung und Moment sind also unstetige Funktionen von x oder u. Wir machen die vereinfachende Annahme, daß die elastischen Linien sämtlicher Schaufeln kongruent sind.

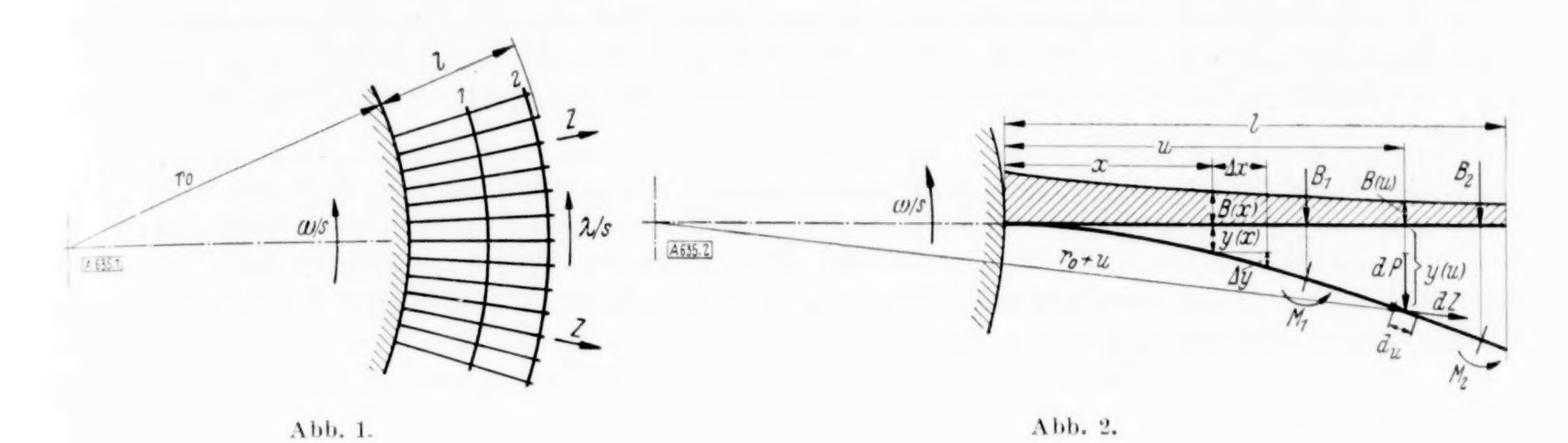


Abb. 1. Abb. 2.

Das beschriebene elastische System kann erzwungene Schwingungen ausführen, wenn man am äußeren Ende der Schaufeln eine harmonische Kraft von beliebiger Frequenz λ oder ein Moment oder beides gleichzeitig angreifen läßt. Die elastische Linie der Schaufeln — die Schwingungsform — ist in diesen drei Fällen verschieden. Die Differentialgleichung der Schwingung ist von der vierten Ordnung; deshalb wird die Schwingungsform durch vier Randbedingungen festgelegt, nämlich den Schwingungsausschlag y, die Neigung y', das Biegemoment oder y'' und die Querkraft oder y'''. Kennt man für eine beliebige Schwingungszahl diese vier Größen an einem Schaufelende, dann kann man schrittweise die gesamte Schwingungsform bestimmen. Die hierfür wichtigen Formeln ergeben sich wie folgt:

$$\frac{g}{\gamma}\,M(x)=(\lambda^2+\omega^2)\int\limits_{u=x}^{l}F(u)\,y(u)\,(u-x)\,du-\omega^2\int\limits_{u=x}^{l}F(u)\,(r_0+u)\,[y(u)-y(x)]\,du$$
$$+B_1\,y_1\,(u_1-x)+B_2\,y_2\,(u_2-x)-M_1-M_2\,,$$

$$\frac{g}{\gamma}\,\Delta M=\frac{g}{\gamma}\,V(x)\,\Delta x-\frac{g}{\gamma}\,Z(x)\,\Delta y-\frac{1}{2}\,F_m\,\Delta x\,[(\omega^2+\lambda^2)\,y_m\,\Delta x-\omega^2\,(r_0+x_m)\,\Delta y]\,,$$

$$\Delta y=\frac{E\,I(x)\,y'(x)\,\Delta x+M\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x^2-V(x)\,\frac{\Delta x^3}{2}+Z(x)\,y'(x)\,\frac{\Delta x^3}{4}}{E\,I(x)-Z(x)\,\frac{\Delta x^2}{4}}\,.$$

Kennt man an der Stelle x sämtliche Größen, dann kann man mit diesen Formeln die entsprechenden Werte an der Stelle $x+\Delta x$ berechnen. F_m, x_m und y_m sind dabei Mittelwerte im Bereich Δx.

Von größter Bedeutung ist nun die freie Schwingung, bei der sowohl die Zwangskraft als auch das Moment am äußeren Schaufelende gleich Null sind. Wir kennen zunächst weder die Eigenschwingungszahl noch das Moment und die Querkraft an der Einspannstelle. Wir können diese drei Größen schätzen und so lange verändern, bis bei immer erneutem Berechnen der Schwingungsform die Eigenschwingung gefunden wird. Das bedeutet aber ein Tasten unter ∞^3 Wertegruppen. Die Homogenität der Differentialgleichung erlaubt es uns aber, die zu schätzenden Wertegruppen auf ∞^2 zu vermindern, indem wir neben λ nur noch das Verhältnis $M(0):V(0)$ schätzen.

Aber wir können noch einen Schritt weitergehen, indem wir die Überlagerungsmöglichkeit der Schwingungen zu Hilfe nehmen. Es gilt für jedes beliebige λ:

$$y(l)=k_m\,M(l)\,,\quad \text{oder auch}\quad y(l)=k_v\,V(l)\,,$$

oder allgemein

$$y(l)=k_m\,M(l)+k_v\,V(l)\,.$$

Für eine angenommene Schwingungszahl berechnen wir zweimal die Schwingungslinie mit verschiedenen Anfangswerten $M(0):V(0)$. Dann erhalten wir:

$$y_1(l) = k_m M_1(l) + k_v V_1(l), \qquad y_2(l) = k_m M_2(l) + k_v V_2(l).$$

Daraus können wir k_m und k_v berechnen und ferner für $V(l) = 0$ das Moment $M_0(l)$, für das $y(l) = 1$ wird.

$$y(l) = 1 = k_m M_0(l).$$

Wenn wir $M_0(l)$ über λ auftragen, dann stellt jede Nullstelle der Funktion $M_0(l) = f(\lambda)$ eine Eigenschwingung des Systems dar. Wir haben damit die möglichen Wertegruppen auf 2∞ vermindert. Ein derartiges Verfahren läßt sich aber mit zulässigem Zeitaufwand durchführen.

Das beschriebene Verfahren kann auch bei der Untersuchung von anderen elastischen Systemen angewandt werden. Genannt seien hier die mehrfach gelagerten Wellen, gewisse Brücken- und Fundamentkonstruktionen und die Turbinenscheiben. Es kann natürlich nicht gesagt werden, ob die beschriebene Rechnung dort gegenüber den bekannten Verfahren praktische Vorteile bietet. 635

Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen.

Von *W. Tollmien* in Göttingen.
(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die Strömung adiabatisch zusammendrückbarer Gase bleibt wirbelfrei, wenn die Wirkung der Zähigkeit vernachlässigt werden kann. Die Geschwindigkeitskomponenten können in diesem Falle aus einem Potential abgeleitet werden. Kompressible Potentialströmungen sind daher oft untersucht worden. Brauchbare Rechenverfahren liegen vor, wenn die Schallgeschwindigkeit im Strömungsgebiet entweder überall größer oder überall kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit ist.

Große Schwierigkeiten ergeben sich aber, wenn die Schallgeschwindigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit durchschritten wird. Die partielle nichtlineare Differentialgleichung für das Strömungspotential ändert nämlich ihren Typus beim Übergang von der Unterschall- in eine Überschallströmung. Im Unterschallgebiet ist die Differentialgleichung elliptisch, im Überschallgebiet hyperbolisch. Außerdem liegt die Grenze zwischen beiden Gebieten nicht etwa von vornherein fest, sondern muß bei der Lösung der Differentialgleichung selbst erst mitbestimmt werden.

Daher existieren sehr wenig Beispiele von Strömungen mit einem Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Näherungsweise durchgerechnet wurden bisher nur Strömungen durch Lavaldüsen.

Es besteht daher ein dringendes Bedürfnis nach exakten Lösungen des Potentialproblems kompressibler Strömungen in der Nähe der Schallgeschwindigkeit. Der Konstruktion stationärer und ebener Strömungen dieser Art wird folgender Plan zugrunde gelegt. Es wird ein krummliniges orthogonales Koordinatensystem in der Ebene eingeführt und die Strömungsgeschwindigkeit in Komponenten nach den neuen Koordinatenlinien zerlegt. Dann sollen diese Geschwindigkeitskomponenten auf einer Schar von Koordinatenlinien konstant sein. Ein ähnliches Verfahren wurde von G. Hamel zur Konstruktion von Strömungen einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit mit großem Erfolg benutzt. Die erste Frage ist, welche Kurvenscharen als Träger konstanter Tangential- und Normalgeschwindigkeit möglich sind. Es ergeben sich genau zwei Klassen von Kurvenscharen. Erstens erhält man logarithmische Spiralen mit den beiden Grenzfällen des radialen Strahlenbüschels und der konzentrischen Kreisschar. Für die Grenzfälle war die ausgesprochene Eigenschaft schon bekannt, worauf hin sie für die logarithmischen Spiralen im vergangenen Jahre von L. Prandtl vermutet wurde. Zweitens erhält man beliebige Geradenscharen, die natürlich nur in einem Ebenenstück brauchbar sind, das sie einfach überdecken.

Im zweiten Teil der Arbeit werden Strömungen der angegebenen Art im Koordinatennetz der logarithmischen Spiralen wirklich berechnet. Dadurch lassen sich u. a. Strömungen durch gekrümmte Kanäle darstellen. 636

Fortschritte in der Strömungsuntersuchung mit dem Ultramikroskop[1].

Von *G. Vogelpohl* VDI in Berlin.

(Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin).

Dieses von Fage und Townend angegebene Verfahren[2]) wurde im Institut für Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin weiter ausgebaut. Es gelang, die Strombahnen photographisch aufzunehmen dadurch, daß auf eine Vergrößerung des Bildes bei der Aufnahme verzichtet wurde. Wird der Lichtstrahl der beleuchtenden Bogenlampe noch periodisch unterbrochen, so erhält man auf der Platte scharf begrenzte Striche, die die Geschwindigkeitsverteilung auszumessen gestatten, ohne daß ein die Strömung störendes Meßinstrument eingeführt zu werden braucht.

Die laminare Rohreinlaufströmung wurde eingehender untersucht, wobei auch im unterkritischen Gebiet Schwingungen der abgeflachten Profile vor der noch nicht ausgebildeten Poiseuilleschen Parabel festgestellt wurden. Durch ein zeitlich mittelndes Meßinstrument (Staurohr) lassen sich diese Schwankungen nicht feststellen. Die Ergebnisse stellen einen Beitrag zur Turbulenzentstehung im Kreisrohr dar, insofern, daß die axiale Komponente der Schwingungen sich auf diese Weise feststellen läßt, sie ergänzen daher die von Naumann mittels Farbfäden beobachteten radialen Komponenten[3]).

Hydrodynamische Lagertheorie und halbflüssige Reibung.

Von *G. Vogelpohl* VDI in Berlin.

(Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin).

In den bisherigen Arbeiten der hydrodynamischen Theorie trat als einzige das Schmiermittel kennzeichnende physikalische Größe die Zähigkeit auf. Der einfachen Rechnung wegen wurde diese meist konstant gesetzt und damit die Berücksichtigung der Erwärmung des Öls durch innere Reibung ausgeschaltet. Wird diese mit berücksichtigt, so kennzeichnen das Öl außerdem: die Veränderlichkeit der Zähigkeit mit der Temperatur, das Raumgewicht, die spezifische Wärme und die Wärmeleitzahl, ebenfalls als Funktionen der Temperatur.

Unter der Voraussetzung, daß die gesamte entwickelte Wärme zur Temperaturerhöhung der Schmierschicht dient, also bei Vernachlässigung der Wärmeabgabe an das Metall, läßt sich die Rechnung für den ebenen Schmierkeil elementar durchführen. Dabei ist die Abhängigkeit der Zähigkeit η von der Temperatur ϑ in Gestalt eines Exponentialgesetzes $\eta = \eta_1 \cdot e^{-\beta(\vartheta - \vartheta_1)}$ angenommen, was für den in Betracht kommenden Temperaturbereich mit genügender Genauigkeit stets möglich ist. Die Rechnung zeigt, daß bei gleichbleibender geometrischer Gestalt der Schmierschicht für verschiedene Öle mit nahezu derselben relativen Temperaturänderung doch stark voneinander abweichende Zähigkeits- und Druckverteilungen und demnach verschiedene Tragfähigkeiten zu erwarten sind.

Diese Ergebnisse können zur Klärung der Erscheinung beitragen, daß bei gemischter Reibung Öle „gleicher Zähigkeit“ verschiedene Reibungsbeiwerte ergeben, was zur Einführung neuer Begriffe, wie Schmierwert oder Schmierfähigkeit usw. geführt hat. Bei der halbflüssigen Reibung wird im eingelaufenen Zustand der Lagerlast teils durch hydrodynamische Drücke in der Schmierschicht mit Reibungsbeiwerten $\mu = 0{,}001$ bis $0{,}005$, teils durch fast metallische Berührung unter Zwischenschaltung diskreter Molekülschichten (Grenzschmierung) mit μ-Werten von 0,1 bis 0,3 das Gleichgewicht gehalten. Die Rauhigkeit der Oberflächen auch bei feinsten technischen Bearbeitungsmethoden bedingt, daß diese beiden Zustände nebeneinander bestehen, ein allmählicher Übergang zwischen beiden ist nicht zu erwarten. Die der Grenzschmierung unterworfenen Stellen bestimmen die Lage des Zapfens in der Schale, so daß die Gestalt des hydrodynamischen Schmierfilms dadurch gegeben ist. Unter diesen Umständen werden bei Anwendung verschiedener Öle sich voneinander abweichende Druckentwicklungen ergeben, und der Anteil der Flüssigkeitsdrücke an der Aufnahme der Lagerlast P auch verschieden ausfallen. Die Differenz muß bei gegebenem P unter Grenzschmierung mit den hohen Reibungsbeiwerten aufgenommen werden. Damit ergibt sich zwanglos eine Erklärung für die abweichende Schmierfähigkeit von Ölen.

[1]) Die ausführliche Veröffentlichung dieser Arbeit erscheint demnächst in Forschg. Ing. Wes. Bd. 8 (1937).
[2]) A. Fage und H. C. H. Townend: Proc. Roy. Soc. London (A), Bd. 135 (1932), S. 656.
[3]) A. Naumann: Forschg. Ing. Wes. Bd. 2 (1931), S. 85.

Eine Nachprüfung dieser Überlegungen an bereits vorliegenden Versuchsergebnissen ist nur in sehr begrenztem Umfang möglich, da für die bisher bei Versuchen verwandten Öle die Angabe des Raumgewichts γ, der spezifischen Wärme c und der Wärmeleitzahl λ fehlen. Die Ergebnisse von Voitländer mit der Thomaschen Ölprüfmaschine[1]) können jedoch unter Verwendung empirischer Formeln zur näherungsweisen Bestimmung der spezischen Wärme aus dem angegebenen Raumgewicht zum Vergleich herangezogen werden. Man erhält das überraschende Ergebnis: Die Größe $\beta/\gamma c$ liefert ein gleiches Maß für die Schmierfähigkeit wie die Messungen auf der Ölprüfmaschine von Thoma[2]).

637

Streifen mit Einzellast.

Von *C. Weber* in Dresden.

Die Spannungen einer zweidimensionalen Scheibe sind durch die Airysche Spannungsfunktion F gegeben. Durch zweimalige Differentiation nach x erhält man die Spannung $\sigma_y = \varphi_1 - y\,\varphi_2$ (φ_1 und φ_2 Potentialfunktionen), deren Kenntnis im wesentlichen genügt, um hieraus die Spannungsfunktion wieder zu gewinnen. Bei dem im weiteren behandelten Spannungsprobleme beschränke ich mich auf die Angabe der Spannungen σ_y.

Bei der Halbebene $y > 0$, die durch eine Druckkraft P im Koordinatenanfangspunkt belastet ist, erhält man:

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi}\left\{\varphi(x, y) - y\,\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{mit } \varphi(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} = \Re\,\frac{i}{x + i\,y} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für eine Reihe periodisch angreifender Druck- und Zugkräfte im Abstand $\pi\,l$ läßt sich die Belastung schreiben:

$$P = -\sigma_{y,\, y=0} = \frac{2\,P}{\pi \cdot l}\sum_{n=1,3,5\ldots}\cos\frac{n\,x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Spannungen σ_y werden:

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi}\left(\Phi(x\;y) - y\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\text{mit } \Phi(x, y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} e^{-n\,y/l}\cos\frac{n\,x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Geht $l \to \infty$, so geht $\Phi \to \varphi$:

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1,3\ldots} e^{-n\,y/l}\cos\frac{n\,x}{l} \to \varphi^{(1)} = \Re\,\frac{i}{x + i\,y} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Differenziert man ν-mal nach y, so erhält man:

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1,3\ldots}\left(-\frac{n}{l}\right)^{\nu} e^{-n\,y/l}\cos\frac{n\,x}{l} \to \varphi^{(\nu+1)} = -\,\nu\,!\,\Re\,\frac{(-\,i)^{\nu+1}}{(x + i\,y)^{\nu+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (7a).$$

Geht man von der Halbebene $y < 0$ aus, so erhält man den Übergang

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1,3\ldots}\left(\frac{n}{l}\right)^{\nu} e^{n\,y/l}\cos\frac{n\,x}{l} \to -\,\varphi^{(\nu+1)} = \nu\,!\,\Re\,\frac{(-\,i)^{\nu+1}}{(x + i\,y)^{\nu+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (7b).$$

[1]) R. Voitländer: Mittlg. des hydr. Inst. der TH. München, Heft 3. München und Berlin 1929, S. 145.

[2]) Weitere Einzelheiten bringt das VDI-Forschungsheft 383.

Liegt die Begrenzung und der Angriffspunkt um $y = m\,h$ höher, so erhält man:

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1,3\ldots}\left(\pm\frac{n}{l}\right)^{\nu} e^{\pm n(y-mh)/l}\cos\frac{n\,x}{l} \rightarrow \mp\,\varphi\, m^{(\nu+1)} = \pm\,\nu!\,\Re\frac{(-i)^{\nu+1}}{(x+i\,(y-m\,h))^{\nu+1}} \quad \ldots \quad (8).$$

Der Index bei φ gibt an, daß $(y - m\,h)$ an Stelle von y in die Übergänge (7a) und (7b) zu setzen ist.

Nun werde der Streifen untersucht, eine zweidimensionale Scheibe, die durch die Geraden $y = \pm\,h$ begrenzt ist.

Bringen wir am Oberrande periodisch im Abstande $\pi\,l$ Druck- und Zugkräfte P an, so läßt sich die Belastung wieder nach Gl. (3) schreiben.

Man erhält in bekannter Weise

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi}\left\{\Phi_1 - (y-h)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \Phi_2 - (y+h)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

mit

$$\Phi_1 = \frac{e^{n(y+h)/l} + e^{-n(y+h)/l}}{l\cdot e^{2nh/l}}\left[\frac{1}{1-\left(e^{-4nh/l} - 4\dfrac{n\,h}{l}e^{-2nh/l}\right)} + \frac{1}{1-\left(e^{-4nh/l} + 4\dfrac{n\,h}{l}e^{-2nh/l}\right)}\right] \quad (10)$$

und

$$\Phi_2 = \frac{e^{-n(y-h)/l} - e^{n(y-h)/l}}{l\cdot e^{2nh/l}}\left[\frac{1}{1-\left(e^{-4nh/l} - 4\dfrac{n\,h}{l}e^{-2nh/l}\right)} - \frac{1}{1-\left(e^{-4nh/l} + 4\dfrac{n\,h}{l}e^{-2nh/l}\right)}\right] \quad (11).$$

Die Brüche in den eckigen Klammern von (10) und (11) werden durch die Reihenentwicklungen ersetzt:

$$\frac{1}{1-\left(e^{-4nh/l} \mp 4\dfrac{n\,h}{l}e^{-2nh/l}\right)} = 1 + \left(e^{\frac{-4nh}{l}} \mp 4\frac{n\,h}{t}e^{-2nh/l}\right) + \left(e^{-4nh/l} \mp 4\frac{n\,h}{l}e^{\frac{-2nh}{l}}\right)^2 + \cdots \quad (12).$$

Führt man diese Reihen in (10) und (11) und Φ_1 und Φ_2 in (9) ein, so erhält man die Lösung von σ_y so umgeformt, daß man die Umwandlungen (8) vornehmen kann. Man kommt somit zur Lösung des Streifens mit einer Einzelkraft:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_y = \frac{P}{\pi}\Bigg\{&\left[\ldots + \varphi^{(1)}_{-3} + \varphi^{(1)}_{1} + \varphi^{(1)}_{5} + \ldots\right] - (y-h)\frac{\partial}{\partial y}\left[\ldots + \varphi^{(1)}_{-3} + \varphi^{(1)}_{1} + \varphi^{(1)}_{5} + \ldots\right]\\
&+ 4\,h\left[\ldots - \binom{1}{1}\varphi^{(2)}_{-3} + \binom{1}{1}\varphi^{(2)}_{5} + \binom{2}{1}\varphi^{(2)}_{9} + \ldots\right]\\
&\qquad - 4\,h\,(y+h)\frac{\partial}{\partial y}\left[\ldots - \binom{1}{1}\varphi^{(2)}_{-3} + \binom{1}{1}\varphi^{(2)}_{5} + \binom{2}{1}\varphi^{(2)}_{9} + \ldots\right]\\
&+ (4\,h)^2\left[\ldots \binom{2}{2}\varphi^{(3)}_{-7} + \binom{2}{2}\varphi^{(3)}_{5} + \binom{3}{2}\varphi^{(3)}_{9} + \ldots\right]\\
&\qquad - (4\,h)^2\,(y-h)\frac{\partial}{\partial y}\left[\ldots \binom{2}{2}\varphi^{(3)}_{-7} + \binom{2}{2}\varphi^{(3)}_{5} + \binom{3}{2}\varphi^{(3)}_{9} + \ldots\right]\\
&+ (4\,h)^3\left[\ldots - \binom{3}{3}\varphi^{(4)}_{-7} + \binom{3}{3}\varphi^{(4)}_{9} + \binom{4}{3}\varphi^{(4)}_{13} + \ldots\right]\\
&\qquad - (4\,h)^3\,(y+h)\frac{\partial}{\partial y}\left[\ldots - \binom{3}{3}\varphi^{(4)}_{-7} + \binom{3}{3}\varphi^{(4)}_{9} + \binom{4}{3}\varphi^{(4)}_{13} + \ldots\right] + \ldots\Bigg\}
\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Die Summe in der ersten eckigen Klammer der ersten Zeile der Gl. (13) läßt sich durch eine Funktion ersetzen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \left[\ldots + \varphi^{(1)}_{-3} + \varphi^{(1)}_{1} + \varphi^{(1)}_{5} + \ldots\right] = \Re\frac{\pi\,i/4\,h}{\mathfrak{Tg}\,\pi\,[x+i\,(y-h)]/4\,h}\\
&= \frac{\pi}{8\,h}\,\frac{\sin\pi\,(y-h)/2\,h}{\mathfrak{Cof}^2\,\pi\,x/4\,h - \cos^2\pi\,(y-h)/4\,h}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

Die eckige Klammer der zweiten Zeile läßt sich durch Ableitungen von Φ nach h und y ausdrücken und so fort. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y = \frac{P}{\pi}\Big\{&\Big[1-(y-h)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\Phi - \frac{h}{1!}\Big[1-(y+h)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\Big(\frac{\partial}{\partial h}+\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Phi\\ &+\frac{h}{2!}\Big[1-(y-h)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\Big(\frac{\partial}{\partial h}-3\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial h}+\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Phi\\ &-\frac{h}{3!}\Big[1-(y+h)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\Big(\frac{\partial}{\partial h}+5\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial h}-3\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial h}+\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Phi\\ &+\ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15).$$

Nimmt man in Gl. (13) nur die Funktionen $\varphi_1^{(1)}$ der ersten Zeile, so erhält man die Halbebene mit Einzellast oder den Streifen, auf dessen Oberrande eine einzelne Druckkraft und auf dessen Unterrande sowohl Normal- als auch Schubbelastungen wirken. Nimmt man in Gl. (13) sowohl $\varphi_1^{(1)}$ als auch $\varphi_1^{(3)}$ in beiden eckigen Klammern der ersten Zeile, so erhält man einen Streifen, auf dessen Oberrand eine Druckkraft P und die Belastung $p_o = \frac{P}{\pi}\cdot\frac{4h}{x^2+(4h)^2}$ und auf dessen Unterrand die Belastung $p_u = \frac{P}{\pi}\cdot\frac{4h((2h)^2-x^2)}{((2h)^2+x^2)^2}$ wirkt (Abb. 1).

Nimmt man für σ_y die ganze erste Zeile der Gl. (13), so erhält man einen Streifen mit der Druckkraft P auf dem Oberrande und der Belastung auf dem Unterrande $p_u = \frac{\pi P}{8h}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2(\pi x/4h)}$ (Abb. 2).

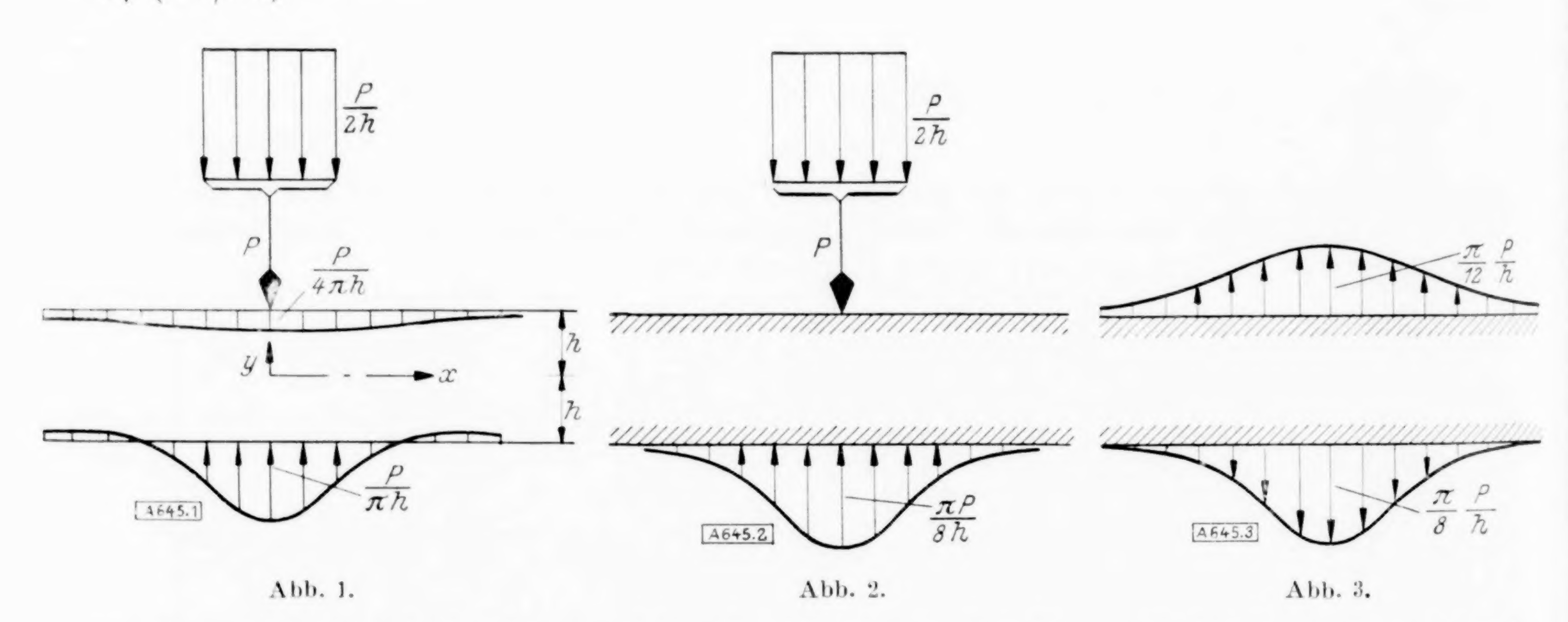


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Dieses ist die einzige Lösung folgenden Problems: Der Oberrand des Streifens sei durch eine Einzelkraft belastet, der Unterrand durch eine verteilte Belastung, für große Werte von x verschwinde die Spannung σ_y; gesucht die Spannung σ_y von der Form

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi}\Big(\Phi - (y-h)\frac{\partial}{\partial y}\Phi\Big).$$

Die zweite Zeile der Gl. (13) gibt den Spannungszustand, hervorgerufen durch eine Zugbelastung am Unterrande, welche die vorherige Belastung gerade aufhebt, also $p_u = \frac{-\pi P}{8h}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2(\pi x/4h)}$ und einer Zugbelastung am Oberrande, die noch stärker verteilt ist:

$$p_o = \frac{-\pi P}{4h}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi x/4h}{\mathfrak{Sin}^3\,\pi x/4h}\cdot\Big(\frac{\pi x}{4h} - \mathfrak{Tg}\frac{\pi x}{4h}\Big)$$

(Abb. 3). Dieses geht so weiter: jede folgende Zeile der Lösung (13) hebt auf einem der Streifenränder die vorhergehende Belastung auf und ruft auf dem anderen Rande eine noch flachere Belastung hervor. Dabei wird jeweils $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} p_{o,u}\cdot dx\right|$ gleich $|P|$.

Man kann bei der Untersuchung sich mit den nächstgelegenen Singularitäten begnügen, Spannungen und Randbelastungen bestimmen und den nicht gewünschten Belastungsanteil nach F. Seewald[1]) durch ein anderes Verfahren beseitigen, bei dem man von den Belastungen p_o und p_u und deren Ableitungen ausgeht.

Auch für das rotationssymmetrische Problem, also für die Platte mit Einzelkraft gilt Gl. (13)[2]); σ_y ist dann die Spannung in Richtung der Achse, die Platte wird begrenzt durch die Ebenen $y = \pm h$ und für $\varphi_m^{(1)}$ ist die Potentialfunktion zu setzen: $\varphi_m^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{y - m\,h}{(r^2 + (y - m\,h)^2)^{3/2}}$, während für $\varphi_m^{(\nu+1)}$ wie vorher die ν-te Ableitung nach y von $\varphi_m^{(1)}$ zu nehmen ist. Begnügt man sich mit den Gliedern $\varphi_1^{(1)}$ und $\varphi_{-3}^{(1)}$, so erhält man die Platte mit der Druckkraft P, der zusätzlichen oberen Belastung $p_o = \frac{P}{\pi} \frac{2\,h}{(r^2 + 16\,h^2)^{3/2}}$ und der zusätzlichen unteren Belastung
$p_u = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{3\,h\,(12\,h^2 - r^2)}{(r^2 + 4\,h^2)^{5/2}}$.

645

Theorie der aktiven Schlingertanks.

Von *Georg Weinblum* in Berlin.

Die „klassische“ Theorie der Schiffsschwingungen, die von Kryloff zum Abschluß gebracht worden ist, beschreibt die Schlingerbewegungen durch eine Differentialgleichung, in der die übrigen Bewegungsarten nicht vorkommen; sie gibt die Möglichkeit, die erregenden Auftriebsmomente für beliebige Wellenlängen und Kurswinkel (Winkel zwischen Fortschrittsrichtung des Schiffes und der Welle) ohne Mühe zu berechnen, wenn die Schiffsoberfläche durch Polynome dargestellt wird. Infolge der Linearisierung der Gleichung sind zwei Erscheinungen nicht erfaßt worden: das Auftreten von Schlingern beim gleichzeitigen Gieren und Stampfen und das Entstehen von krängenden Momenten wegen der Zentrifugalkräfte, die durch eine etwa sinusförmige Horizontalprojektion der Schiffsschwerpunktbahn im Seegang bedingt ist. Diese Effekte sowie die Unregelmäßigkeit des Seegangs sind zu berücksichtigen, wenn man zu einer befriedigenden Berechnung der Schlingertanks gelangen will, insbesondere müssen wegen der Veränderlichkeit der erregenden Momente die Einschwingvorgänge und die Dämpfung der Eigenschwingungen betrachtet werden. Trotz mancher formaler Fortschritte hat die Theorie der Frahmschen Schlingertanks I. Art hinsichtlich ihres physikalischen Gehalts seit der grundlegenden Abhandlung von F. Horn (Jahrb. Schiffb.-Ges. Bd. 12 (1911)) sich nur wenig entwickelt (G. Bauer); die Auswirkung auf die Praxis ist schon aus dem Grunde sehr beschränkt geblieben, weil erst E. Hahnkamm Aufgaben eingehender quantitativ durchgearbeitet hat.

Obgleich die im passiven Frahmschen Tank ruhenden Möglichkeiten noch keineswegs erschöpft sind, erscheint es erwünscht, die Leistungsfähigkeit der Vorrichtung zu steigern, indem man auf das Tankwasser zusätzliche gesteuerte Kräfte (z. B. mit Druckkraft) ausübt. Ein solches, Aktivierung genanntes Verfahren ist von der Firma Siemens entwickelt worden.

Man erhält ein brauchbares mechanisches Modell der Vorgänge, wenn man die Differentialgleichungen für den passiven Tank durch das auf der rechten Seite der Gl. (2) stehende Glied erweitert, das die zusätzliche Wirkung auf das Tankwasser berücksichtigt:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi - n^2\,\psi = \overline{m}\sin\omega t \qquad (1),$$

$$\ddot{\psi} + 2\,n'\,\dot{\psi} + \omega_1^2\,(\psi - \varphi) = m'(t) \qquad (2)$$

(Koordinaten nach Frahm-Horn, ω_0 und ω_1 Eigenfrequenzen des unstabilisierten Schiffes, $n^2 = \frac{2\,\varrho\,g\,F\,b^2}{I'\,x}$ mit I'_x-Trägheitsmoment des Schiffes, F-Tankoberfläche, b Abstand der Tankmitte von der Mittschiffsebene). Das reduzierte Antriebsmoment kann in Abhängigkeit vom

[1]) F. Seewald: „Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt.“ Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der T. H. Aachen, 1927, Heft 7, S. 19.

[2]) Vergl. C. Weber: „Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern.“ ZAMM 1925, S. 467.

erregenden Moment $m'(t) = \overline{m}' \sin \omega t$ (3) oder von dem Schlingerwinkel bzw. dessen Ableitungen gesteuert werden

$$m'(t) = \overline{m}'_0 \varphi \quad (4), \qquad m'(t) = \overline{m}'_1 \dot{\varphi} \quad (5), \qquad m'(t) = \overline{m}'_2 \ddot{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Reaktion von $m'(t)$ sei in $\overline{m}$ der Gl. (1) enthalten oder zunächst vernachlässigt; es bereitet keine Schwierigkeiten sowohl sie wie die Eigendämpfung des Schiffes zu berücksichtigen. Die Diskussion der Amplitudenverzerrung des Schlingerwinkels φ (erregende Schwingung im regelmäßigen Seegang) führt zu folgenden Ergebnissen:

1. Bei der Steuerung nach (3) bleiben die Unendlichkeitsstellen (ungedämpfter Tank $2w' = 0$) dieselben wie beim passiven Tank, die Nullstelle von φ verschiebt sich jedoch je nach Größe und Vorzeichen von $\overline{m}'$.

2. Bei der Steuerung nach (4) und (6) bleibt die Nullstelle dieselbe wie beim passiven Tank, dagegen verschieben sich die Unendlichkeitsstellen derart, daß der für die Stabilisierung günstige Bereich der Frequenzverhältnisse größer wird.

3. Die Dämpfung des Tankwassers vernichtet auch beim aktiven Tank den Idealzustand $\varphi = 0$; sie beseitigt aber die Stellen sekundärer Resonanz und läßt die Eigenschwingungen abklingen. Anschaulich kann man einen entscheidenden Vorzug der Aktivierung so aussprechen: trotz stärkerer Dämpfung, mit der die genannten Vorzüge verbunden sind, läßt sich eine größere Menge Ballastwasser zur Bekämpfung der erregenden Momente fördern.

Das Studium des Einschwingvorgangs geschieht in der üblichen Weise, indem im allgemeinen Integral der Bewegungsgleichung die Konstanten aus angenommenen Anfangsbedingungen bestimmt werden, wobei man in erster Näherung für die Berechnung der Dämpfungen und Frequenzen den Gedankengängen von Föppl folgt (Techn. Mech. Bd. 6).

638

Betrachtung zur räumlichen Tragflügelströmung.

Von *F. Weinig*, VDI.

(Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.)

Bei der theoretischen Behandlung der Tragflügelströmung wird allgemein eine so kleine Belastung des Tragflügels zugrunde gelegt, daß die hinter dem Tragflügel zurückbleibende Wirbelfläche als mit der Spur des Tragflügels zusammenfallend angesehen werden darf. An dieser Grundlage wird im folgenden nichts geändert. Die durch die Wirbelfläche weit hinter dem Tragflügel bedingten und der Fluggeschwindigkeit zu überlagernden Zusatzgeschwindigkeiten stehen senkrecht zur Fluggeschwindigkeit. In der Querebene senkrecht zur Fluggeschwindigkeit, welche den Tragflügel in der Tragflügelquerachse schneidet, sind die Komponenten der Zusatzgeschwindigkeit senkrecht zur Fluggeschwindigkeit halb so groß wie die Zusatzgeschwindigkeit weit dahinter. Weit vor dem Tragflügel verschwindet die Zusatzgeschwindigkeit.

Denkt man sich also über den Stromlinien der Zusatzströmung weit hinter dem Tragflügel Zylinder errichtet, so sind die Zylinder mit großer Annäherung Strömungsflächen. Bezeichnet n die Normale zu diesen Zylindern, so müßte überall $c_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein. Weit vor und weit hinter dem Tragflügel und in der genannten Querebene ist dies genau der Fall. Aber auch dazwischen sind größere Abweichungen nicht zu erwarten.

Alle Stromlinien verlaufen also mit großer Annäherung auf solchen Zylindern, indem sie zunächst der Fluggeschwindigkeit parallel verlaufen, im Bereich des Tragflügels aber umlenken, um hinter dem Tragflügel entsprechend der Zirkulation diese Zylinder zu umlaufen.

Wir wollen nun die Strömung zwischen zwei solchen benachbarten Zylindern betrachten, wobei wir uns diese Zylinder, da reibungsfreie Strömung vorausgesetzt wird, erstarrt denken dürfen. Wir haben es dann mit einer ähnlichen Strömung zu tun, wie sie etwa bei der Berechnung eines axialen Turbinenleitapparates zugrunde zu legen und mit Hilfe der Theorie der Gitterströmung zu behandeln ist. Allerdings ist die „Leitschaufel"-Zahl nur eins und der Ringspalt hat keine konstante Breite.

Will man diese Strömung wie eine zweidimensionale Strömung behandeln, so muß man den Ringspaltquerschnitt auf einen konzentrischen Kreisring vom Umfange a oder auf ein Stück eines Parallelstreifens von der Breite dy des Tragflügelelementes und der Länge a abbilden. Diese Abbildung wollen wir so vornehmen, daß der im Spalt enthaltenen Menge bei der Fluggeschwindigkeit v_0 die gleiche kinetische Energie durch das Tragflügelelement zugeführt wird.

Man sieht leicht ein, daß diese Abbildung konform ist. Das Tragflügelelement beeinflußt die Luft genau so wie ein Gitter aus Tragflügelprofilen bei ebener Strömung. Die Staffelung dieses Gitters ist $\beta = 0$, die Teilung $a = \frac{\Gamma}{2 v_i}$.

In einem solchen Gitter ist aber bei gleichem wirksamen Anstellwinkel der Auftriebsbeiwert eines Profils kleiner als der eines alleinstehenden Profils, nämlich

$$c_a = 2\pi k \sin \alpha_\infty \qquad \text{statt } c_a = 2\pi \sin \alpha_\infty ,$$

wobei

$$k = \frac{2a}{\pi t} \mathfrak{Tg} \frac{\pi t}{2a} \qquad \text{statt } k = 1$$

ist.

Da durch diesen Einfluß c_a kleiner wird und damit auch der induzierte Anstellwinkel α_i, so wird der wirksame Anstellwinkel $\alpha_\infty = \alpha - \alpha_i$ etwas größer, als sich nach der gebräuchlichen Theorie der tragenden Linie ergibt, so daß der Auftrieb des Tragflügels selbst zwar weniger wird, aber doch mehr als das k-fache des nach der gebräuchlichen Theorie zu berechnenden Wertes.

Bei der Anwendung auf den Flügel mit elliptischem Grundriß und elliptischer Auftriebsverteilung ergibt sich

$$\frac{a}{t} = \frac{\Gamma}{2 v_i t} = \frac{b}{t_0},$$

über die Spannweite konstant. Daraus ergibt sich, daß der unverwundene Flügel von elliptischem Grundriß auch nach der dargelegten Theorie elliptische Auftriebsverteilung über die Spannweite besitzt.

Mit $\alpha_i = \frac{c_a}{\pi \frac{b^2}{F}}$ erhält man aus $c_a = 2\pi k (\alpha - \alpha_i)$

$$c_a = 2\pi \frac{k}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{t_0}{b} k} \alpha, \quad \text{wobei } k = \frac{2b}{\pi t_0} \mathfrak{Tg} \frac{\pi t_0}{2b} \text{ zu setzen ist.}$$

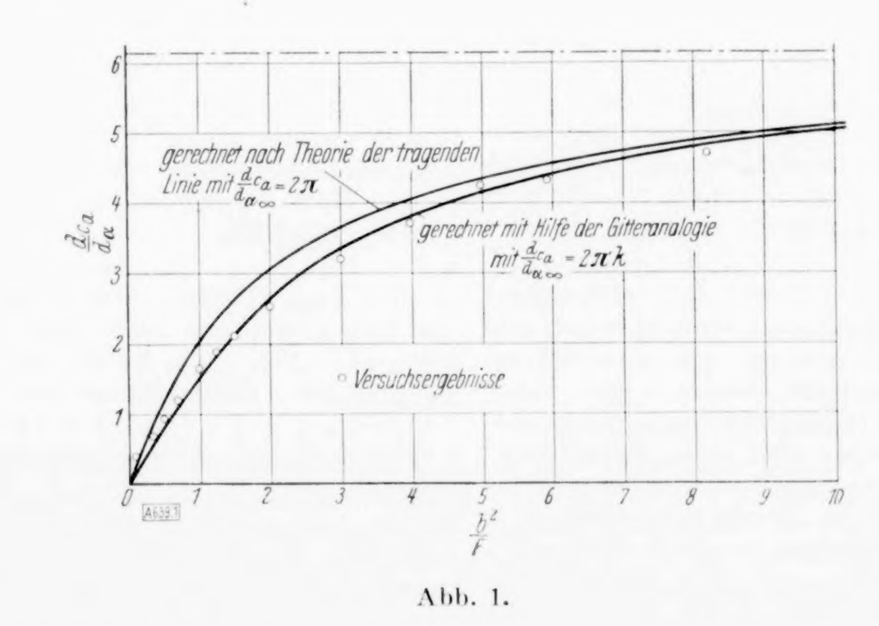


Abb. 1.

Unter Benutzung der hiernach errechneten Verminderung des Auftriebs sind die Ergebnisse der üblichen Theorie der tragenden Linie für einen Rechteckflügel umgerechnet worden und in Abb. 1 mit Versuchsergebnissen verglichen. Danach erscheint es praktisch zulässig, die für den elliptischen Flügel elliptischer Auftriebsverteilung zu errechnende Verminderung auch in anderen Fällen zu verwenden.

BUCHBESPRECHUNGEN

Verein Deutscher Ingenieure, Sonderheft Luftfahrt. IV + 132 S. mit 315 Abb. und 27 Zahlentafeln. Berlin 1936, VDI-Verlag. Preis 6 M.

Es ist zweifellos ein Verdienst des VDI, daß er von Zeit zu Zeit in Sonderheften Ausblicke auf wichtige Gebiete der modernen Technik darbietet. Das hier vorliegende Heft „Luftfahrt" bringt aber mehr als eine bloße Übersicht über ein heute schon ungemein ausgedehntes Gebiet: der Fachmann findet in dieser reichhaltigen Zusammenfassung wertvolle Belehrung über neue und neueste Erscheinungen der Fliegerei und außerdem Anregung in reichem Maße wegen der engen Verquikkung der flugtechnischen Belange mit nahezu allen übrigen technischen Fachgebieten.

Das Sonderheft behandelt in Einzelaufsätzen zunächst die wissenschaftliche Forschung, weiterhin die Entwicklung der Sport- und Verkehrsflugzeuge, einen Überblick über die Kriegsflugzeuge und eine Darstellung des heutigen Luftverkehrs mit weiten Ausblicken für die zukünftige Entwicklung. Eine Artikelserie ist dem Flugmotorenbau gewidmet, und zum Schluß gibt ein Anhang ausführliche und wertvolle Literaturübersicht über flugtechnische Arbeiten, entnommen den Jahrbüchern des VDI. Nach dieser summarischen Aufstellung möge es, um den Charakter der Aufsätze zu zeigen, genügen, nur eines der vielen Kapitel etwas eingehender zu besprechen:

In der „Forschung" legt Herr Kohler ein historisch kritisches Zeugnis ab über den Entwicklungsgang der modernen Aerodynamik, er zeigt, wie Forschung und Anwendung gemeinsam in planvoller Arbeit um die Weiterentwicklung der Luftfahrt bemüht sind, wie die Theorie durch die experimentelle Forschung immer wieder korrigiert und zu weiteren Fortschritten angeregt wird, und er zeigt vor allem auch die vielfältigen Methoden der experimentellen Zweckforschung.

Dr.-Ing. Winter bringt einen speziellen, aber besonders wichtigen Ausschnitt aus dem Forschungsprogramm, nämlich die noch nicht ganz geklärten Strömungsvorgänge an Flächen und Klappen für kleine Spannweiten (Leitwerke, Steuerruder). Das Propellerproblem, das schon seit Jahrzehnten ein so großes theoretisches wie praktisches Interesse besitzt, wird durch die Aufsätze von Gutsche über den Verstellpropeller und die Besprechung der Hubschrauber-Frage von Schoppe unter manchen neuen Gesichtspunkten behandelt, während Wieselsberger einen kurzen Beitrag zur gegenseitigen Beeinflussung von Flügel und Luftschraube gibt. Endlich erfahren wir in zwei Aufsätzen von Dircksen und Francis Näheres über Windkanäle von besonderer Größe und über Trudeltanks.

Es ist überraschend, wieviel Material bei knapper Darstellung in diesen Aufsätzen gebracht wird und wie es übersichtlich geordnet zu einem anschaulichen Lehrgebäude aufgebaut worden ist. Aber auch die anderen in der Einleitung genannten Kapitel des Sonderheftes tragen viel zur „Forschung" bei (insbesondere soll da auf die Aufsätze des leider zu früh verstorbenen Martin Schrenk und von Pleines hingewiesen werden).

Bei der raschen Entwicklung der Flugtechnik ist zu erwarten, daß dies Sonderheft in absehbarer Zeit veraltet sein wird. Es steht aber zu hoffen, daß der VDI auch dann wieder auf dem Plan sein wird mit neuen Heften, aus denen dann im Laufe der Zeit ein aufschlußreiches Zeitdokument über die Entwicklung eines der anregendsten und vielseitigsten Arbeitsgebiete der Technik entstehen wird.

Hannover. A. Pröll.

R. v. MISES, Prof. a. d. Univ. Istanbul, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung Bd. 3. Zweite, neubearbeitete Aufl. VIII + 282 S. Wien 1936, Verl. J. Springer. Preis br. 16 M.

Der Zweck dieser Schrift, deren erste Auflage im Jahre 1928 erschien, ist, möglichst ohne Benutzung der mathematischen Zeichensprache in einer auch dem Nicht-Mathematiker verständlichen Form zu zeigen, „daß man von einem logisch geklärten, auf allgemeine Erfahrungsgrundlagen gestützten Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgehend, durch Betrachtungen, die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch als statistisch bezeichnet werden, zur Erkenntnis der Wahrheit in einem weiten Bereich menschlicher Interessen gelangt". Das ist dem Verfasser in der ersten, wie in der neuen Auflage, deren Umfang um fast hundert Seiten gewachsen ist, ausgezeichnet gelungen. Überall sind in der neuen Auflage Ergänzungen eingearbeitet. Vor allem treffen die Erweiterungen den Abschnitt über die Kritik der Grundlagen, in denen sich der Verfasser mit den inzwischen erschienenen Arbeiten zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie auseinandersetzt. Er kommt dabei zu dem Ergebnis: „Akzessorisch und in einem gewissen Maße modifizierbar ist die genaue Festsetzung der Eigenschaften, die ein Kollektiv besitzen muß; die Existenz der Grenzwerte der relativen Häufigkeit und die Regellosigkeit. Die Einwände, die bisher gegen meine Formulierung der Regellosigkeitsforderung erhoben wurden, haben bisher zu keiner neuen geführt, die als Ersatz für sie einzutreten vermag." Wesentlich erweitert ist natürlich auch der Abschnitt über die Probleme der physikalischen Statistik, in dem insbesondere die seit Erscheinen der ersten Auflage wichtig gewordene Statistik der Quantenmechanik berücksichtigt wird.

Die neue Auflage weist die gleichen Vorzüge wie die erste auf: Sie behält in geschickter Weise den Charakter von Vorträgen bei und sorgt dabei durch gelegentliche Wiederholungen dafür, daß dem Leser die Hauptgedankengänge vertraut werden; die Darstellung ist klar und gut lesbar; der Inhalt gibt alles für das Verständnis Wesentliche und führt bis zu den Problemen, die gerade heute von Interesse sind. Es kann daher jedem, der sich für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen interessiert oder der sich mit dahingehenden Fragen beschäftigen muß, nur dringend empfohlen werden, sich durch die Lektüre gerade dieses Buches einen Überblick über die Grundfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über ihre Anwendungen zu verschaffen.

Freiberg (Sa.) Fr. A. Willers.

Dr.-Ing. ÖMER LUFTI **SALIH,** Prüfung der wichtigsten Methoden der äußeren Ballistik zur Ermittlung der Geschoßbahnen hinsichtlich Genauigkeit und Zeitaufwand. (1. Sonderheft der Wehrtechnischen Monatshefte.) 44 S. m. 18 Skizzen. Berlin 1935, E. S. Mittler. Preis kart. 2 M.

Nach Vergleich der Resultate, die man mit einigen älteren Methoden zur Behandlung des speziellen ballistischen Problems erhält, mit den von Cranz bestimmten Normalbahnen, werden drei neuere Methoden erläutert, nämlich die in dieser Zeitschrift XI (1931) von Eberhard angegebene, das zuerst 1917 von Cranz und R. Rothe auf die Bestimmung der Flugbahn angewandte zeichnerische Verfahren der sukzessiven Approximation und das Verfahren von Veithen (1919), der die Flugbahn stückweise mittels der Formeln von Runge-

Kutta berechnet. Der Vergleich mit zwei erschossenen Flugbahnen ergibt, daß man mit dem graphischen Verfahren die größte Genauigkeit erreicht, obwohl es den geringsten Zeitaufwand erfordert. Sicher ist das zeichnerische Verfahren schon prinzipiell allen anderen überlegen, da diese Näherungsverfahren sind, mit denen nur eine begrenzte Genauigkeit zu erreichen ist. Dazu kommt, daß die zeichnerische Methode unabhängig von besonderen Voraussetzungen ist. Man wird sie daher stets anwenden, wenn man nur wenige Schußbahnen zu bestimmen hat. Bei häufiger Anwendung strengt sie aber die Augen so stark an, daß meiner Ansicht nach dann ein numerisches Verfahren, das eine ausreichende Annäherung gibt, auch dann vorzuziehen ist, wenn es etwas mehr Zeit erfordert, zumal es von weniger geschulten Kräften angewandt werden kann, während für die geschickte Verwendung des zeichnerischen Verfahrens doch mehr Übung und ein gewisses Verständnis für das zu behandelnde Problem erforderlich ist.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 611

Prof. Dr. W. **SCHWINNING** VDI, Konstruktion und Werkstoff der Geschützrohre und Gewehrläufe. 167 S. m. 117 Abb. und 13 Zahlentafeln. Berlin 1934, VDI-Verlag G. m. b. H. Brosch. 15 M, VDI-Mitgl. 13,50 M.

In deutscher Sprache erschien die letzte ausführliche Darstellung des hier behandelten Gebietes im Jahre 1900. Seitdem stehen einmal, infolge der technischen Fortschritte der Stahlindustrie, Werkstoffe zur Verfügung, die wesentlich stärkeren Beanspruchungen gewachsen sind, andererseits stellt man heute auf Grund der Erfahrungen des Weltkrieges neue Anforderungen an die Leistungsfähigkeit des Geschützes. Eine zeitgemäße, zusammenfassende Darstellung alles dessen, was sich auf die Konstruktion und die Werkstoffe der Geschützrohre bezieht, wie sie das vorliegende Buch liefert, war daher sehr erwünscht. Der Verf., der über reiche Erfahrungen, insbesondere auf dem Gebiet der Werkstofffragen, verfügt, bespricht, nachdem er in kurzen einführenden Abschnitten die Entwicklung der Geschützrohre und Gewehrläufe und den Aufbau moderner Rohre behandelt hat, zunächst eingehend Berechnung und Gestaltung der Geschützrohre. In der zweiten Hälfte des Bändchens, die einen Abschnitt über das Ausschießen von Gewehrläufen und Geschützrohren und einen weiteren über die Rohrwerkstoffe und ihr Verhalten bei Betriebs- und Gewaltbeanspruchungen enthält, kommen noch mehr als in der ersten Werkstofffragen zur Sprache.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 611

H. **HAEGER,** VDI, staatlich berufener Prüfingenieur für Statik, Statik in Bild und Gleichungen. Tafeln zur allgemeinen Berechnung und Querschnittsbemessung einfacher und unbestimmter Systeme. VIII + 57 S. m. 140 Abb. und 80 Tafeln. Din. A. 4. Berlin 1935, VDI-Verlag. Preis geb. 48 M.

Im Schrifttum der Baustatik besitzen für den Ingenieur neben Lehr- und Handbüchern auch Taschenbücher Bedeutung. In diese Gruppe gehört das Buch „Statik in Bild und Gleichung", das sich im besonderen den Bedürfnissen des „Praktikers" anpassen will. Es bietet in seinen Hauptabschnitten ausgewählte Rechenvorschriften und Gebrauchsformeln aus der Theorie der statisch unbestimmten Stabwerke und Verfahren zur Querschnittbemessung und Spannungsberechnung von Eisenbetonquerschnitten. Die Zielsetzung des Buches veranlaßt den Verfasser, sich dabei auf die elementaren Hilfsmittel der Baustatik zu beschränken. Die Begründung der verwendeten Rechenvorschriften ist leider unvollständig, unklar und zum Teil falsch. Für den Handgebrauch gibt es außerdem zumeist bessere Verfahren, die schneller zum Ziele führen.

Dresden. R. Arendt. 606

Dr.-Ing. BERNHARD **FRITZ,** Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger bei Berücksichtigung des Einflusses der Systemverformung. VI + 142 S. m. 75 Abb. im Text. Berlin 1934, Verlag Julius Springer. Preis 12 M.

Der Verfasser untersucht den Spannungszustand eines Bogenträgers mit verschiedenen Randbedingungen unter Berücksichtigung seiner Formänderung. Diese besitzt unter Umständen ebenso wie beim Hängeträger große Bedeutung und kann dann bei der Beurteilung der Festigkeit des Tragwerks nicht vernachlässigt werden. Der Verfasser leitet die Theorie ausführlich ab und zeigt deren Anwendung an mehreren Zahlenbeispielen. Bekanntlich verliert die Grundlage der elementaren Baustatik, das Superpositionsgesetz, hier seine Gültigkeit, so daß die Grenzwerte der Schnittkräfte nicht mehr mit Hilfe von Einflußlinien festgestellt werden können. Außerdem liefern Temperaturänderungen auch Spannungen im statisch bestimmten Dreigelenkbogen. Für die Verwendung der Arbeit beim Entwurf von Bogenbrücken aus Stahl oder Eisenbeton ist die Untersuchung einer im Vergleich zur endgültigen Mittellinie überhöhten Bogenform wichtig. Bei geeigneten Annahmen gelingt es, die Zusatzspannungen aus der Formänderung des Dreigelenkbogens um 50 v. H. zu senken und beim eingespannten Bogen nahezu vollständig zu beseitigen. Die ausführliche Untersuchung dieser Zusammenhänge verdient bei der gegenwärtigen Verwendung hochwertiger Baustoffe im Brückenbau Beachtung.

Dresden. K. Beyer. 603

J. F. **KOKSMA,** Diophantische Approximationen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftltg. d. „Zentralblatt für Mathematik". Bd. IV.) VI + 157 S. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 18,40 M.

Es ist dem Verfasser gelungen, auf außerordentlich klare Weise einen Überblick über die ganze umfangreiche und interessante Theorie zu geben, die sich im Laufe der Zeit auf diesem Gebiet entwickelt hat. Bei der Darstellung wurde das Hauptgewicht darauf gelegt, die Problemstellungen, Methoden und Resultate möglichst deutlich hervortreten zu lassen, was ganz besonders dazu beiträgt, das Buch interessant und leicht zugänglich zu machen. Die Beweise mußten oft durch Methodenbetrachtungen ersetzt werden; weil sich aber überall viele Literaturangaben finden, wird man es kaum als Mangel anzusehen haben; außerdem hat das Buch dadurch sehr an Übersichtlichkeit gewonnen.

Das Literaturverzeichnis am Ende des Buches ist wohl auf den meisten Gebieten vollständig. Ein paar Ausnahmen (die aber die Regel bestätigen) werden vom Verfasser auf S. 30 und 58 angeführt.

Der Verfasser deutet bei allen Problemen ihren historischen Werdegang an von der Zeit ihres ersten Auftauchens an bis heute. An einzelnen Stellen skizziert er auch, wie wohl wahrscheinlich die Entwicklung weitergehen wird. Dagegen war es leider unmöglich, die Anwendungen der Theorie (wie z. B. die fastperiodischen Funktionen) und einzelne verwandte Probleme (wie z. B. Hypertranszendenz) zu behandeln. Jedoch gibt es auch für diese Gebiete ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Alles in allem, ein interessantes und wertvolles Handbuch!

Hamburg. Poul W. Marke. 599

F. **HAUSDORFF**, em. o. Prof. a. d. Un. Bonn. Mengenlehre. (Göschens Lehrbücherei. Gruppe I, Reine Math., Bd. 7, 3. Aufl.) 307 S. m. 12 Abb. Berlin und Leipzig 1935, Verlag W. de Gruyter u. Co. Preis geb. 13,50 M.

Die 3. Auflage dieses bekannten, ganz ausgezeichneten Werkes über Mengen ist ein fast unveränderter Abdruck der 2. Auflage aus dem Jahre 1927. Hinzugekommen ist ein 10. Kapitel, welches von Mengenmoduln und der Baireschen Bedingung sowie von halbschlichten Abbildungen handelt. Außerdem finden sich am Schlusse des Buches einige Nachträge, so daß es auch von den neusten Fortschritten der Theorie, die man den Polen verdankt, einen Eindruck vermittelt.

Die Mengenlehre ist eine der abstraktesten und gleichzeitig schönsten mathematischen Disziplinen. Sie spielt eine große Rolle auf allen Gebieten der Mathematik (vor allem z. B. in der Theorie der Integrale und Integralgleichungen), da sie so außerordentlich zur Klärung der Begriffe beiträgt. Die berühmt-berüchtigten Antinomien der Mengentheorie haben allerdings bekanntlich auch zu Verwirrungen Anlaß gegeben. Diese werden in vorliegendem Lehrbuch ausdrücklich nicht behandelt. Das ist ein deutlicher Hinweis auf die Ziele, die der Verfasser verfolgt.

Hamburg. W. Maak. 601

W. **KRULL**, Idealtheorie. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik", 4. Bd., 3.) V + 152 S. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 17,50 M.

Das Buch gibt eine wohl vollständige Übersicht über den heutigen Stand der kommutativen Idealtheorie. Verf. gliedert seinen Bericht in die „additive" Idealtheorie, die auf die klassische Arbeit über Polynomringe von Lasker zurückgeht und besonders in der Begründung der algebraischen Geometrie eine wichtige Rolle spielt, und die auf Dedekind fußende „multiplikative", deren Ursprung und Hauptanwendungsgebiet die algebraische Zahlentheorie ist. Die Grundgedanken der Beweise sind überall skizziert, viele Literaturangaben und Hinweise im Text und ein Verzeichnis am Schluß erleichtern die Benutzung der einschlägigen Literatur und machen das Buch zu einem wertvollen Wegweiser für den, der tiefer in dies Gebiet der modernen Mathematik einzudringen wünscht.

Hamburg. H. Nehrkorn. 602

MAX **DEURING**, Algebra. („Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete", hrsg. v. der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". 4. Bd. 1.) 143 S. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 16,60 M.

1. Heft: Max Deuring, Algebren. V + 143 S. Preis 16,60 M.

Das Buch füllt eine empfindliche Lücke in der derzeitigen Literatur aus; es gibt zum erstenmal einen zusammenfassenden Bericht über die Theorie der hyperkomplexen Systeme (Algebren), wie sie sich namentlich in der letzten Zeit entwickelt hat. Die beiden ersten Kapitel bringen die abstrakten Grundlagen und die algebraischen Struktursätze, das 3. die Darstellungstheorie. Das 4. und 5. behandelt den Zusammenhang mit der kommutativen Algebra, insbesondere der Galoisschen Theorie, und die Faktorensysteme und damit zusammen mit dem 6. und 7. die Sätze, die neuerdings in der algebraischen Zahlentheorie, insbesondere der Klassenkörpertheorie zu großer Bedeutung gelangt sind. In Kap. 6 wird die Arithmetik der Algebren entwickelt, das wichtigste Gebiet der nichtkommutativen Idealtheorie.

Der Bericht hat den Charakter eines knapp gefaßten Lehrbuches, ein reiches Literaturverzeichnis am Schluß vermittelt den Zusammenhang mit den Originalarbeiten.

Hamburg. H. Nehrkorn. 602

Dr.-Ing. A. **REINHARDT** VDI, Dresden, Zum Ähnlichkeitsgesetz für Hohlraumbildungen, und Dr.-Ing. H. **KRANZ** VDI, Essen, Strömung in Spiralgehäusen. (Forschungsheft 370, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". Ausg. B, Bd. 6, Januar/Februar 1935.) 31 S. m. 64 Abb. Berlin 1935, VDI-Verlag m. b. H. Preis 5 M.

Das umfangreiche Gebiet der Strömungsmaschinen erfährt durch diese zwei Versuchsarbeiten eine wertvolle Bereicherung.

A. Reinhardt geht bei der Aufstellung des Versuchsplanes davon aus, daß die aus der Ähnlichkeitstheorie abgeleiteten Folgerungen für Hohlraumbildungen in Strömungsmaschinen eine Einschränkung der Gültigkeit von Modellversuchen bedingen. Nur das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz kann bei Modellversuchen zugrunde gelegt werden. Der aus dem Ähnlichkeitsgesetz für Hohlraumbildungen berechnete Kavitationsbeiwert σ hat sich als nicht genügend sicher zu ermittelnde Größe erwiesen. An dem Kaplanturbinen-Versuchstand im Dresdener Masch.-Lab. werden daher Vergleichsversuche über den Eintritt von Ablösungen bei gleichen σ und verschiedenen Gefällhöhen durchgeführt. Es werden Abweichungen von der Newtonschen Ähnlichkeit abhängig von der Kavitationskennzahl festgestellt und ihre Ursache in der Dampfblasenbildung gesehen.

H. Kranz untersucht eingehend die Rückwirkung der Form von Spiralgehäusen einer Turbine und Kreiselpumpe des Institutes für Wasserkraftmaschinen der TH. Hannover auf ihre Wirkungsgradbeeinflussung. Durch Geschwindigkeits- und Druckmessungen an zahlreichen Gehäusestellen wird das Strömungsbild festgehalten. Die Versuche wurden in geschlossenen und offenen Gehäusen durchgeführt. In Leitschaufelnähe war die Strömung nicht axialsymmetrisch infolge der Ausbildung des Gehäuse-Einlaufes und durch auftretende Nebenströmungen. Axialsymmetrie wird am besten erzielt bei einem Zentriwinkel der Spiralwand von etwa 360°. Eine Führung der Zunge bis unmittelbar an die Leitschaufeln heran ist nicht nötig. Bei Kreiselpumpen ist die Erweiterung des Gehäuseauslaufes von ausschlaggebendem Einfluß auf die Strömung. Es ergeben sich hier große Abweichungen von der Potentialströmung.

Berlin. O. Holfelder VDI. 608

Dr.-Ing. E. **KALLHARDT** VDI, Indizieren schnellaufender Verbrennungskraftmaschinen, und Dr.-Ing. C. **MAYER-SCHUCHARDT**, Schwingungen von Luftsäulen mit großer Amplitude. (Forschungsheft 376, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". Ausg. B, Bd. 7, Januar/Februar 1936. 22 S. m. 68 Abb. Berlin 1936, VDI-Verlag. Preis 5 M.

Beide Forschungsarbeiten beschäftigen sich mit den durch die hin- und hergehende Kolbenbewegung in Kolbenkraftmaschinen verursachten Schwierigkeiten der meßtechnischen Erfassung dieser Vorgänge.

Die erste Arbeit, die dem Labor von Prof. Dr. Nusselt entstammt, hat die Genauigkeitsuntersuchung von mechanischen, stroboskopischen und elektrischen Indizierverfahren durch Vergleichsversuche unter konstanten Arbeitsbedingungen an einem Fahrzeugvergasermotor mit bis zu 1250 U/min sich zur Aufgabe gestellt. Obwohl die Tatsache

daß ein mit geringster Trägheit aufzeichnender Indikator auch die geringsten *pi*-Werte ergibt, längst bekannt war, ist es sehr dankenswert, daß diese planmäßigen eingehenden Versuche durchgeführt wurden. Daß der Farnboro-Indikator in dem Meßbereich nur 4 bis 5 % zu hohe Werte anzeigte, dürfte daran liegen, daß die gewählten Drehzahlen noch nicht als ausgesprochen hoch zu bezeichnen sind. Bei Drehzahlen von etwa 3000 U/min dürften die Unterschiede durch starke Streuung der stroboskopischen Farnboro-Punkte noch größer werden. Allerdings dürften dann auch die gewählte Bauart der Kolben-Quarzkammer und die Eigenfrequenz der 2000 Hz-Meßschleife nicht mehr genügend trägheitslos sein. Für die Drehzahlbereiche, in denen überhaupt noch andere als elektrische Indikatoren anwendbar sind, ist durch die Versuche Kallhardts eine gute Klärung der erreichbaren Genauigkeit vermittelt.

Die zweite Versuchsarbeit entstand im Laboratorium von Prof. Dr. Schmidt, Danzig. Sie befaßt sich mit Luftsäulen-Schwingungen großer Amplitude. Diese sind nicht durch Rechnung mit der Theorie der linearen Schwingungen zu erfassen. Als Schwingungserreger diente die Kolbenbewegung eines elektrisch angetriebenen und von 0 bis 4000 U/min regelbaren Zweizylinder-Motors. Untersucht wurden die Schwingungen in einem 10 m langen Rohr durch Membran-Druckmessung am Rohrende und Geschwindigkeitsmessung mit Hitzdraht-Anemometer. Die Schwingungen wurden fortlaufend auf ein Filmband aufgenommen. Es ergaben sich im Resonanzgebiet, das 7 % höher als nach der Theorie erwartet lag, trotz sinusförmiger Anregung Wellen mit steilen Fronten. An ihnen treten nennenswerte Drucksprünge, die sich mit Überschallgeschwindigkeit fortpflanzten, auf. Im Ganzen bestätigt die Arbeit die Richtigkeit der von Rüdenberg zuvor theoretisch abgeleiteten Gleichungen für den Druck- und Temperatursprung.

Berlin. O. Holfelder VDI. 608

GRIMSEHL, Lehrbuch der Physik. Neubearbeitet von Dr. R. Tomaschek, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden. Erster Band, Mechanik, Wärmelehre, Akustik. 9. Aufl. VIII + 674 S. m. 740 Abb. Leipzig und Berlin 1936, B. G. Teubner. Preis geb. 19,80 M.

Die Vorzüge dieses Lehrbuches sind hinreichend bekannt. In der vorliegenden 9. Aufl. sind sie ungeschmälert erhalten geblieben, obwohl der gesamte Stoff von Grund auf umgearbeitet ist. Neu hinzugekommen ist ein kurzer, gut gelungener Abschnitt über die Ballistik. Durch die Umstellung des Abschnittes über Schwingungen und Wellen vor den über die Wärmelehre ist die Mechanik einheitlicher zusammengefaßt. Insbesondere für den Ingenieurstudenten ist es sehr wichtig, einmal das ganze Gebiet der Mechanik unter dem Gesichtspunkt der Experimental-Physik kennenzulernen, und dazu kann ihm der neue „Grimsehl“ gut verhelfen.

Stuttgart. G. Wiarda.

Dr. A. **DÄNZNER,** Ass. am phys. Institut der Universität Frankfurt, Grundlagen der Quantenmechanik. Wissensch. Forschungsberichte, Naturwissenschaftliche Reihe, Bd. 35, hrsg. v. Dr. R. E. Liesegang, Frankfurt. XI + 163 S. mit 11 Abb. Dresden und Leipzig 1935, Verlag von Theodor Steinkopff. Preis geb. 13 M.

Für den Leser, der sich schon einmal an den einschlägigen Arbeiten (etwa de Broglie, Dirac, Heisenberg, Schrödinger) versucht hat, dürfte dieses Büchlein sehr willkommen sein; es wird ihm vielfach wie Schuppen von den Augen fallen. So kommt z. B. die Äquivalenz der Schrödingerschen Wellenmechanik und der Heisenbergschen Matrizenmechanik sehr schön heraus. Der Anfänger aber wird, obwohl sehr geschickt einige, den Gedankengang störende Zwischenbetrachtungen in den Anhang verwiesen sind, doch einige Schwierigkeiten haben, ein Umstand, der sich jedoch bei dem behandelten Stoff ohne beträchtliche Raumvermehrung schwerlich vermeiden läßt.

Stuttgart. G. Wiarda.

Dr. Dr.-Ing. e. h. E. **TREFFTZ,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Graphostatik. (Teubners Mathematische Leitfäden. Band 42.) 90 S. m. 99 Abb. Leipzig und Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 6,40 M.

Die graphische Statik, als ein in sich ziemlich fertiges und abgeschlossenes Wissenschaftsgebiet, ist auch in ihrer Darstellung schon nahezu erstarrt; die Lehrbücher sind, gemessen an der Bedeutung des Gegenstands, allmählich recht umfangreich geworden und schleppen manchen alten Ballast mit sich. Für ein kurzes, handliches und modernes Lehrbuch besteht somit ohne Zweifel ein Bedürfnis, und diese „Graphostatik“ erscheint daher gerade zur rechten Zeit. Das Buch umfaßt auf knappen vier Druckbogen in didaktisch sehr klarer und wissenschaftlich einwandfreier Form alles Wesentliche: zuerst ein allgemeines Kapitel über die Grundgesetze der Statik und die Konstruktionselemente der graphischen Statik, dann die Anwendung auf einfache und nichteinfache Fachwerke (dabei ein in dieser Form wohl vom Verfasser stammender Beweis für die Existenz des reziproken Kräfteplanes), weiter die Anwendung auf die Ermittlung von Flächenmomenten 1. und 2. Grades und schließlich auf die Biegung der Balken, — im ganzen also den Stoff, der heute wohl an den meisten Technischen Hochschulen in der Vorlesung über Mechanik vorgetragen wird. Die Trefftzsche „Graphostatik“ wendet sich aber nicht nur an den Ingenieur, sondern auch an den Mathematiker, bei dem sie dafür werben will, sich mehr als bisher mit den Anwendungen seiner Wissenschaft zu befassen. Kaum ein anderes Teilgebiet ist so leicht zugänglich und zeigt so schön das innere Wesen der angewandten Mathematik wie die graphische Statik, die, wie der Verfasser treffend bemerkt, aus wenigen einfachen Grundgedanken eine Fülle praktischer Ergebnisse gewinnen läßt. Dies eindringlich und überzeugend aufzuzeigen, ist das eigentliche Leitmotiv des ganzen Buches.

Stuttgart. R. Grammel. 665

D. **KÖNIG,** a. o. Prof. a. d. kgl. ungarischen Josefs-Universität für Technik und Wirtschaftswissenschaften in Budapest, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Bd. 16 der Sammlung: Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, begr. von E. Hilb, hrsg. von E. Artin. XI + 258 S. mit 107 Abb. Leipzig 1936, Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 18 M.

Eine fleißige und gründliche Darstellung der Topologie der Streckenkomplexe vom kombinatorisch-mengentheoretischen Standpunkt aus mit reichlichen Literaturangaben. Ein kurzer Paragraph behandelt eine Anwendung auf die Elektrizitätslehre (Kirchhoffsche Sätze), ein anderer den Zusammenhang der regulären Graphen 3. Grades mit dem Vierfarbenproblem, das 8. Kapitel amüsante Beziehungen zu mathematischen Spielen. Obwohl die Darstellung elementar gehalten ist, enthält sie eine systematische, auf der Höhe der Wissenschaft stehende Theorie des Gegenstandes und dürfte zur Zeit als Hauptwerk seines Gebietes gelten.

Halle. W. Threlfall. 672

Prof. Dr. W. **BLASCHKE**, Vorlesungen über Integralgeometrie. 1. Heft (Hamburger math. Einzelschriften 20. Heft). 2. Aufl. 60 S. Leipzig 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis brosch. 5 M, geb. 6 M.

Wie am Eingang der Differentialgeometrie der Begriff der Tangente steht, so geht die Integralgeometrie, deren Ausbau in der ersten Auflage dieser Schrift begonnen wurde, vom Begriff des Flächeninhalts als eines Maßes für die Anzahl der Punkte einer Punktmenge aus. Der wesentliche Gedanke ist der, sich nicht auf Mengen von Punkten zu beschränken, sondern Mengen von Geraden, von Lagen starrer Körper usw. zu messen, was im gleichen Maße frei von Willkür möglich ist, wie das Messen von Punktmengen durch den Flächeninhalt. Ein typisches Ergebnis ist z. B. der 1868 von Crofton gefundene Satz, wonach die Menge der Treffgeraden zweier Eibereiche der Ebene durch die Differenz der verschlungenen (achtförmigen) und der unverschlungenen (konvexen) Seillinie gemessen wird, die man um die Bereiche legen kann. Von weiteren Sätzen, die in der bekannten lebendigen, ideen- und beziehungsreichen Darstellung des Verfassers sich bieten, sei auf die Isoperimetrie des Kreises, auf den gemischten Flächeninhalt, der in der Theorie der konvexen Körper nach Steiner, Brunn, Minkowski eine Rolle spielt, und besonders auf die inhaltschwere Hauptformel hingewiesen. Wie alles, was in der Mathematik gesund ist, früher oder später von selbst zur angewandten Mathematik in Beziehung kommt, so ist es auch in der Integralgeometrie. Zwar sollen die Anwendungen erst in einem späteren Hefte der Einzelschriften zur Sprache kommen. Doch wird schon hier ein Invarianzsatz der Optik — Unveränderlichkeit der Strahlendichte bei Durchgang durch ein optisches Instrument — gebracht, während man die Tragweite der Anwendung der Integralgeometrie auf die Optik erst aus Nr. 11 der Arbeiten zur Integralgeometrie erkennen kann. — Klassische Gedanken der Mathematik und verständliche Wissenschaft finden sich in dem Hefte aufs schönste vereint.

Halle. W. Threlfall. 672.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. FRANZ **VON KRBEK**, Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik. Neue Deutsche Forschungen, herausgegeben von H. R. G. Günther und E. Rothacker. Band 81. Abt. Mathematik in Verbindung mit G. Hamel, G. Kowalewski, W. Süß, E. Tornier herausgegeben von G. Feigl. Bd. 1. 64 S. Berlin 1936, Verlag Junker & Dünnhaupt. Preis brosch. 3,20 M.

E. **TORNIER**, Professor an der Universität Göttingen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie. VI + 160 S. Leipzig und Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 12 M.

J. J. **HOLBA**, Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen. VIII + 190 S. mit 117 Abb. Wien 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 18,60 M.

Dr. C. **CRANZ**, Geh. Reg.-Rat und o. Prof. a. d. Techn. Hochschule, Berlin, Lehrbuch der Ballistik, Ergänzungen zum Band I. 5. Aufl. (1925), Band II (1926), und Band III. 2. Aufl. (1927). XII + 292 S. m. 87 Abb. und einem Schießtabellen-Anhang m. 2 Diagrammen. Berlin 1936, Verlag Jul. Springer. Preis geb. 36 M.

REINHOLD **FÜRTH**, Prof. an der Deutschen Universität Prag, Einführung in die Theoretische Physik. XIV + 483 S. mit 128 Abb. Wien 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 19,80 M.

Dr.-Ing. Dr. techn. E. **RAUSCH**, a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben. 1. Teil: Allgemeine Konstruktions- und Berechnungsgrundlagen, ausführliche Behandlung der durch Stoßwirkung beanspruchten Gründungen. 111 S. Berlin 1936, Vertrieb VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 9 M.

Prof. O. TH. **BÜRKLEN**, Mathematische Formelsammlung. (Sammlung Göschen, 51) neubearbeitet von Dr. F. RINGLEB. 270 S. m. 37 Fig. Berlin und Leipzig 1936, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr.-Ing. F. **TÖLKE**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung vom Argument $r\sqrt{i}$. 92 S. mit 3 Abb. Stuttgart 1936, Verlag Konrad Wittwer. Preis geb. 4,90 M.

GERHARD **HALLE**, Otto Lilienthal, der erste Flieger. 192 S. m. 76 Abb. u. 5 Tafeln. Berlin 1936, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis geb. 4,80 M.

Nationalpolitische Übungsstoffe für den mathematischen Unterricht, bearb. v. OTTO **KÖHLER** und Dr. ULRICH **GRAF**. (Ehlermanns Mathematisches Unterrichtswerk, herausgegeb. von Otto Köhler und Dr. Ulrich Graf.) Heft 2. Ergänzungsheft zu Lötzebeyers Mathematik für höhere Schulen. Mittelstufe. 56 S. Preis kart. —,90 M. Heft 3. Ergänzungsheft zu Lötzebeyers Mathematik für höhere Schulen, Oberstufe. 65 S. Dresden 1936, Verlag L. Ehlermann. Preis kart. 1,20 M.

Dr. K. **KOMMERELL**, o. Prof. a. d. Univ. Tübingen. Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik. VIII + 249 S. m. 110 Fig. Leipzig 1936, K. F. Koehler Verl. Preis 14 M.

Dr. WILH. **MÜLLER**, Prof. a. d. Techn. Hochschule, Aachen, Einführung in die Mechanik des Fluges. VII + 115 S. m. 55 Abb. Leipzig 1936, Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchh.. Preis brosch. 4,80 M.

Prof. Dr. A. **THUM**, VDI, und Dr. Ing. W. **BAUTZ**, VDI, Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Formelementen durch Kaltverformung. (Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 8.) VI + 89 S. m. 71 Abb. u. 28 Zahlentaf. Berlin 1936. VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 8,50 M.

Professor Dr.-Ing. JULIUS **RATZERSDORFER**, Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. IX + 321 S. m. 151 Abb. Wien 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,80 M.

Dr. JOHANNES **FISCHER**, Einführung in die klassische Elektrodynamik. VII + 199 S. m. 120 Abb. Berlin 1936. Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,80 M.

Dr. Ing. OTTO **MUND**, Der Rebhannsche Satz. VI + 34 S. m. 30 Textabb. Berlin 1936, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 3 M.

Dr. W. **LIETZMANN** und Dr. **J. JAROSCH,** Arithmetik, Algebra und Analysis für die V. und VI. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Frauenoberschulen, unter Benützung von Lietzmann-Zühlke: Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis (Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen von W. Lietzmann und J. Jarosch). Wien 1936, Verlag Franz Deuticke. Preis geb. 3,20 M.

J. P. **DEN HARTOG,** Associate Professor of Applied Mechanics, Cambridge, Mass. Mechanische Schwingungen. Deutsche Bearbeitung von Dr. Gustav MESMER, Aerodynamisches Institut Aachen. XII + 343 S. m. 274 Abb. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 29,60 M.

Prof. Dr. Ing. G. **BIERETT** und Dr. Ing. G. **GRÜNING,** Staatl. Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem. Untersuchung über die Knickfestigkeit von gestoßenen Stützen mit plangefrästen Stoßflächen und nur teilweiser Stoßdeckung (Kontraktstöße) bei mittiger und außermittiger Belastung: Untersuchung über den Einfluß von Schrumpfdruckspannungen in geschweißten Druckgliedern auf die Knickfestigkeit bei mittiger und außermittiger Belastung. (Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, Ausgabe B.) 22 S. m. 27 Abb. Berlin 1936. Verlag Julius Springer. Preis brosch. 3,60 M.

CL. H. **TIETJEN,** Raum oder Zahl (Schule im Aufbau aus völkischer Wirklichkeit herausg. von Cl. H. Tietjen, 6.), m. einem Geleitwort von Ministerialdirektor Prof. Dr. Vahlen. 51 S. m. 30 Fig. u. 7 Tonbildern. Leipzig 1936, Verlag Friedrich Brandstetter. Preis brosch. 1,50 M.

Dr. ROLF **NEVANLINNA,** Prof. a. d. Univ. Helsinki, Eindeutige Analytische Funktionen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLVI.) VIII + 353 S. m. 24 Abb. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 29,40 M.

NACHRICHTEN

Geheimrat Prof. Dr. Karl Scheel †.

Sonntag, den 8. November, starb in Berlin der Geheime Regierungsrat Prof. Dr. Karl Scheel. Die physikalische Wissenschaft verliert in ihm einen Gelehrten, der durch seine Präzisionsmessungen insbesondere auf dem Gebiete der Wärmelehre zur sicheren Fundierung der Physik wesentlich beigetragen hat. Seine selbstlose Arbeit für das physikalische Schrifttum ist den Lesern unserer Zeitschrift in erster Linie durch das gemeinsam mit Geiger herausgegebene „Handbuch der Physik", durch die „Zeitschrift für Physik" und die „Physikalischen Berichte", deren Schriftleiter Scheel war, bekannt geworden. Seine vortrefflichen Eigenschaften: unbeirrbare Sachlichkeit, Bescheidenheit und große menschliche Güte sicherten ihm die Anerkennung der Fachgenossen und die warme Freundschaft derer, die ihm näher standen.

Trefftz. 662

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 13. November hielt Hr. Prof. Dr. G. Weinblum-Berlin einen Vortrag über „Einige Probleme des Wellenwiderstandes von getauchten Drehkörpern und von Schiffen" (Versuche gemeinsam mit H. Amtsberg und W. Bock).

Am 4. Dezember sprach Hr. Dr.-Ing. habil. H. Buchholz-Berlin über „Die Integralgleichungen der Wirbelströmung".

Persönliches.

Der ord. Professor der Physik an der Universität Berlin Dr. P. Debye, Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für Physik, wurde durch die Verleihung des Nobelpreises für Chemie ausgezeichnet. Im Herbst dieses Jahres ernannte die Harvard Universität, Cambridge/Mass./USA, anläßlich ihrer 300-Jahrfeier Herrn Debye zum Ehrendoktor.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen. In der interessanten Arbeit von Kaiser finde ich auf S. 91/92 die Ableitung von Formeln für die Zerlegung der gemessenen Spannungen nach Biege- und Gewölbespannungen. Da ich mich selbst vor einiger Zeit mit diesem Problem zu befassen hatte, und da es mir dabei gelang, die vollständige Ableitung in sehr einfacher und kurzer Weise durchzuführen — während Herr Kaiser von einer umständlichen Rechnung spricht, die er nicht in extenso ausführt —, glaube ich, diese einfachere Lösung den Lesern nicht vorenthalten zu sollen, um so mehr, da sie in bezug auf das letzte Vorzeichen in Formel (65) abweicht, ferner sehr einfache Ausdrücke für die Winkel ergibt, und sich schließlich eine prägnante Formel für die gegenseitige Abhängigkeit derselben ableiten läßt.

Die hier vorgeschlagene Lösung weicht von der Lösung von Herrn Kaiser im wesentlichen darin ab, daß bei der Ableitung der Formeln die gemessenen, resultierenden Spannungszustände ebenfalls auf gewisse, geeignete Richtungen bezogen werden, und zwar auf dieselben wie der Biegungs- und Gewölbespannungszustand. Als solche dürften sich am besten die Richtungen m, n der Winkelhalbierenden der Richtungskreuze der gemessenen, resultierenden Spannungszustände eignen, Abb. 1a. Indem man die Summe der Normal- und Schubspannungskomponenten des Gewölbe- und Biegungszustandes in den m, n-Richtungen gleich den entsprechenden Komponenten des resultierenden Zustandes setzt, und zwar einmal für die obere Oberfläche, dann für die untere, erhält man sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, und daraus in elementarer Weise die sechs Unbekannten selbst.

Für die zwei gesuchten Spannungszustände ergeben sich so die Formeln, vgl. Abb. 1b:

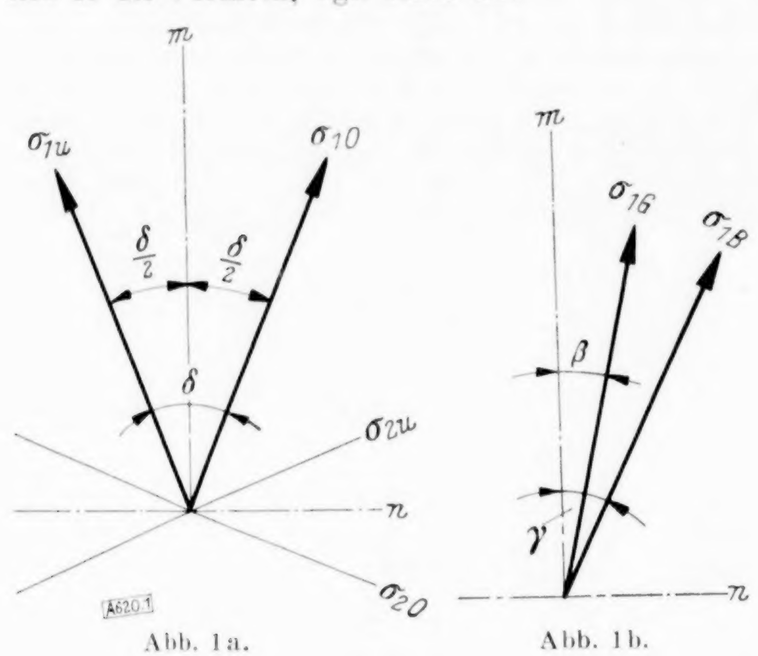


Abb. 1a. Abb. 1b.

Gewölbespannungen:

$$\sigma_{1G},\ \sigma_{2G} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2+2\,b\,d\cos 2\,\delta} \quad (1),$$

$$\operatorname{tg} 2\,\beta = \frac{b-d}{b+d}\operatorname{tg}\delta \quad \dots\dots\dots\dots (2).$$

Biegungsspannungen oben:

$$\sigma_{1B},\ \sigma_{2B} = \frac{a-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2-2\,b\,d\cos 2\,\delta} \quad (3),$$

$$\operatorname{tg} 2\,\gamma = \frac{b+d}{b-d}\operatorname{tg}\delta \quad \dots\dots\dots\dots (4),$$

wobei a, b, c und d folgende Abkürzungen bedeuten:

Gemessener (resultierender) Zustand oben:

$$a = \frac{\sigma_{1O}+\sigma_{2O}}{2}; \quad b = \frac{\sigma_{1O}-\sigma_{2O}}{2} \quad . . (5).$$

Gemessener (resultierender) Zustand unten:

$$c = \frac{\sigma_{1U}+\sigma_{2U}}{2}; \quad d = \frac{\sigma_{1U}-\sigma_{2U}}{2} \quad . . (6).$$

Aus (2) und (4) folgt:

$$\underline{\operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg}^2\delta} \quad \dots\dots (7),$$

woraus ersichtlich ist, daß die Winkel β und γ immer dasselbe Vorzeichen haben.

In der Schreibweise von Kaiser ist, vgl. Formeln (1) und (3):

$$\tau_B,\ \tau_G = \frac{1}{2}\sqrt{\tau_Z^2+\tau_D^2 \mp 2\,\tau_Z\,\tau_D\cos 2\,\delta} \quad . (8).$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der entsprechenden (65) von Kaiser zeigt, daß hier die Vorzeichen des letzten Gliedes vertauscht sind, d. h. daß die Formel (65) von Kaiser diesbezüglich berichtigt werden muß.

Zürich. R. V. Baud. 620

Erwiderung. Die Veröffentlichung der Zuschrift von Herrn Dr. Baud zu meiner Dissertation (Bd. 16, Heft 2, S. 73 bis 98 dieser Ztschr.) kann von mir aus nur begrüßt werden, da in ihr die von mir in meiner Arbeit gebrachten Formeln zur Zerlegung der gemessenen Spannungen nach Biege- und Gewölbespannungen auf einfacherem Wege abgeleitet werden und dabei der Vorzeichenfehler in meiner Formel (65) aufgedeckt wird. R. Kaiser. 620a

Die Strömung um einen ebenen Tragflügel mit Querruder und Bestimmung der Luftkräfte auf einen ebenen Tragflügel mit Querruder. Bd. XVI, Heft 4, Seite 193 bis 198 und Seite 199 bis 226.

Zu den Arbeiten des Herrn Schmieden „Die Strömung um einen ebenen Tragflügel mit Querruder" und des Herrn Ellenberger „Bestimmungen der Luftkräfte auf einen ebenen Tragflügel mit Querruder" bemerken wir:

1. Die stationäre Strömung um eine Platte mit Ruder ist als ebenes Problem für kleine Winkel zuerst von H. Glauert[1]), für endliche Winkel von S.A. Chapligin und Arjanikow (russisch) behandelt; letztere Arbeit ist in Deutschland zugänglich geworden durch die Arbeit von F. Keune[2]), der den theoretischen Gang der russischen Arbeit dargestellt und das Zahlenmaterial erweitert hat. Die von den letzteren gefundene Abbildungsfunktion stimmt mit der von C. Schmieden angegebenen überein.

2. Die instationäre Strömung um eine Platte mit Ruder ist als ebenes Problem für kleine Winkel zuerst von T. Theordorsen[3]) nach der Methode von Wagner behandelt worden, ferner von H. G. Küßner[4]) nach der Methode von Birnbaum. Diese beiden Lösungen stimmen im Ergebnis überein. Der Gang der Rechnung und die Ergebnisse von Theordorsen und Ellenberger sind im wesentlichen gleich.

I. Lotz u. H. G. Küßner. 640

In meinem im Oktoberheft dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz: **Ebene und räumliche Strömung usw. Beitrag zur Theorie der Schmierung. Mitt. II** habe ich leider versäumt, den schönen Apparat von F. W. Thorne zur Theorie der ebenen Schmierströmung, der in Cambridge bei der letzten Tagung des Internat. Kongr. f. Mechanik ausgestellt war, zu nennen.

Dies bedaure ich um so mehr, als er eine starke Anregung zum Bau des von mir in meinem Aufsatz beschriebenen Apparates zur Theorie der räumlichen Schmierströmung gewesen ist. H. Reissner.

[1]) H. Glauert: Theoretical relationship for an aerofoil with hinged flap. ARC-Rep. a. Mem. Nr. 1095 (1927).

[2]) F. Keune: Auftrieb einer geknickten ebenen Platte. Luftfahrtforschung Bd. 13, (1936), S. 86; S. A. Chapligin and N. S. Arjanikow: On the forward aerofoil and flap slot theory. Trans. Centr. Aero-Hydrodyn. Inst. (1931), Nr. 105.

[3]) T. Theordorsen: NACA Rep. 496 (1934).

[4]) H. G. Küßner: Lufo, Bd. 12, S. 193 (1935). Dieser Bericht enthält nur Teilergebnisse. Ein zusammenfassender Bericht erscheint demnächst in der Luftfahrtforschung.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 20, Cäcilienstr. 6. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

Band 17
(17. Jahrgang)

Mit rd. 220 Abbildungen im Text



Berlin
V·D·I-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7
1937